Инженерный вестник Дона, №2 (2023)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2023/8209

О некоторых модельных решениях уравнения ионно-лучевого травления

А.М. Романенков[1,2], *И.М. Ткачева*[1]

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*
[2]*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук, Москва*

Аннотация: В работе рассмотрена математическая модель процесса ионно-лучевого травления. Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение ионно-лучевого травления первого порядка. Установлено, что модельное уравнение ионно-лучевого травления может быть сведено к однородному уравнению Монжа-Ампера. Для этого уравнения предъявлены некоторые классы точных решений. Методом функционального разделения переменных получено степенное решение, которое зависит лишь от набора констант и не содержит произвольных функций. Также найдены решения, которые линейно зависит от произвольных функции от координатной переменной и от временной переменной. Сформулированы предположения и явные условия как из семейств решений уравнения Монжа-Ампера выделить решения, соответствующие рассматриваемому модельному процессу. Указан класс нелинейных уравнений в частных производных первого порядка, которые также могут быть сведены к уравнению Монжа-Ампера. Установлены ограничения на скорость травления, которые позволяют свести уравнение ионно-лучевого травления к линейному гиперболическому уравнению второго порядка, для которого методом разделения переменных удается получить решение в виде ряда Фурье.
Ключевые слова: Уравнение ионно-лучевого травления, уравнение Монжа-Ампера, модельные начально-краевая задача, точные решения.

Введение

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения ионно-лучевого травления. Эта задача является математической моделью технологического процесса протравливания борозд на кремниевой пластине [1]. Формальное обоснование рассматриваемого уравнения проведено в работах [2, 3]. Установлено, что существует преобразование, которое приводит уравнение ионно-лучевого травления к известному уравнению Монжа-Ампера. Интерес к этому уравнению возникает и в дифференциальной геометрии, и в газодинамике [4]. Исследованию решений уравнения Монжа-Ампера посвящено множество современных работ. Так в [5] построено решение в форме триангуляций. В [6] предложен способ построения полиномиальных решений для неоднородного уравнения Монжа-

Ампера и выписаны некоторые явные формулы точного решения. В работе [7] предложен метод нахождения решений в параметрическом виде. Важнейшими вопросами в теории дифференциальных уравнений являются вопросы разрешимости, интегрируемости, однозначности и эти моменты освещаются в работе [8]. В [9] строятся полные выпуклые решения. В работах [10, 11] изучается симметричность решений уравнения Монжа-Ампера. Работы [12-14] посвящены изучению поведения решений при изменении параметров уравнения Монжа-Ампера. Отметим, что уравнение ионно-лучевого травления может быть преобразовано к нелинейному гиперболическому уравнению второго порядка, что позволяет при дополнительных предположениях построить точное решение начально-краевой задачи в виде тригонометрического ряда Фурье.

Уравнение ионно-лучевого травления и уравнение Монжа-Ампера.

Пусть $\varphi = \varphi(x,t) -$ функция нужной степени гладкости, которая описывает эволюцию профиля стравливаемой поверхности, $\theta(x,t) -$ угол между направлением ионного луча и нормалью к стравливаемой поверхности в точке x, $f(\theta) -$ скорость ионно-лучевого травления, которая зависит исключительно от угла θ. Отметим, что имеет место равенство, определяющее угол θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \varphi_x.$$

Следуя работе [6], рассмотрим начально-краевую задачу (1)-(3):

$$\varphi_t(x,t) + f(\theta)\sqrt{1+\varphi_x^2(x,t)} = 0, \qquad (1)$$

$$\varphi_x(0,t) = 0, \qquad \varphi(1,t) = -t, \qquad (2)$$

$$\varphi(x,0) = g(x), \qquad (3)$$

где $g(x) -$ начальный профиль стравливаемой поверхности. Здесь нелинейное дифференциальное уравнение (1) и есть уравнение ионно-лучевого травления. Выполним сведение уравнения (1) к уравнению Монжа-Ампера. Для этого продифференцируем его по t:

$$\varphi_{tt} + f'(\theta)\theta_{\varphi_x}\varphi_{xt}\sqrt{1+\varphi_x^2} + f(\theta)\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2}}\varphi_x\varphi_{xt} = 0. \quad (4)$$

Далее, в уравнении (4) из второго и третьего слагаемых вынесем общий множитель:

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xt}\sqrt{1+\varphi_x^2}\left(f'(\theta)\theta_{\varphi_x} + f(\theta)\varphi_x\frac{1}{1+\varphi_x^2}\right) = 0. \quad (5)$$

Теперь продифференцируем исходное уравнение (1) по x:

$$\varphi_{tx} + f'(\theta)\theta_{\varphi_x}\varphi_{xx}\sqrt{1+\varphi_x^2} + f(\theta)\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2}}\varphi_x\varphi_{xx} = 0. \quad (6)$$

Аналогично в уравнении (6) из второго и третьего слагаемых вынесем общий множитель:

$$\varphi_{tx} + \varphi_{xx}\sqrt{1+\varphi_x^2}\left(f'(\theta)\theta_{\varphi_x} + f(\theta)\varphi_x\frac{1}{1+\varphi_x^2}\right) = 0. \quad (7)$$

Теперь с помощью элементарных преобразований из (7) несложно получаем:

$$\sqrt{1+\varphi_x^2}\left(f'(\theta)\theta_{\varphi_x} + f(\theta)\varphi_x\frac{1}{1+\varphi_x^2}\right) = -\frac{\varphi_{tx}}{\varphi_{xx}}, \quad (8)$$

и после подстановки в уравнение (5) получим однородное уравнение Монжа-Ампера [4, 15]

$$\varphi_{tt}\varphi_{xx} - \varphi_{tx}^2 = 0. \quad (9)$$

Известны свойства решений уравнения Монжа-Ампера [15] и получены некоторые модельные точные решения уравнения Монжа-Ампера [16]:

$$\varphi(x,t) = (C_1x + C_2t + C_3)G\left(\frac{C_4x + C_5t + C_6}{C_1x + C_2t + C_3}\right) + C_7x + C_8t + C_9,$$

$$\varphi(x,t) = (C_1x + C_2t)G\left(\frac{t}{x}\right) + C_3x + C_4t + C_5,$$

где $G(z)$ — произвольная функция, а C_k — произвольные постоянные. Для определения конкретной функции $G(z)$ необходимо использовать начальное условие (2-3). Покажем, что можно получить точное решение с помощью метода функционального разделения переменных [17]. Будем искать решение в виде $\varphi(x,t) = u\big(z(x,t)\big)$, где $z(x,t) = X(x) + T(t)$. После пересчета производных и подстановки полученных выражений в уравнение (9) получим уравнение:

$$\frac{u''(z)}{u'(z)}\left((T')^2X'' + T''(X')^2\right) + T''X'' = 0, \qquad (10)$$

в котором переменные уже могут быть разделены. Для этого разделим уравнение (10) на $T''X''$:

$$\frac{u''(z)}{u'(z)}\left(\frac{(T')^2}{T''} + \frac{(X')^2}{X''}\right) + 1 = 0$$

и, как видно, можно провести стандартный прием разделения переменных.

Пусть искомые функции $X(x), T(t)$ определяются уравнениями:

$$\frac{(T'(t))^2}{T''(t)} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \frac{(X'(x))^2}{X''(x)} = \frac{1}{\nu}$$

где $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Решение этих уравнений легко может быть найдено и в итоге получаем:

$$T(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln|\lambda t + C_0| + C_1, \qquad X(x) = -\frac{1}{\nu}\ln|\nu x + C_2| + C_3.$$

Функция $u(z)$ является решением уравнения $\frac{u''(z)}{u\prime(z)} = -\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}$, и определяется формулой:

$$u = ce^{-\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}z}.$$

Собирая все вместе, найдем решение свободное от произвольной функции, но с 6 произвольными константами:

$$\varphi(x,t) = C_1\big(|\nu x + C_2|^{\lambda}|\lambda t + C_3|^{\nu}\big)^{\frac{1}{\lambda+\nu}} + C_4, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4, \lambda, \nu \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что при реализации метода разделения переменных было выполнено деление на $T''X''$. Такая операция может привести к потере решений дифференциального уравнения, когда $T''X''=0$. Пусть $T''X''=0$. Тогда $T''=0$ или $X''=0$. Рассмотрим какой-то один из случаев (другой полностью симметричный).

Будем считать, что $T''=0$, то есть $T(t)=at+b$ и уравнение (10) примет вид:

$$\frac{u''(z)}{u'(z)}(a^2X'')=0.$$

Если $X''=0$, то $u(z)-$ любая дважды дифференцируемая функция и получаем известное решение $\varphi(x,t)=u(at+cx+b)$. Если $X''\neq 0$, то $\frac{u''(z)}{u\prime(z)}=0$ и получаем, что $u(z)=C_1z+C_2$. Решение уравнения (9) в таком случае определяется формулой:

$$\varphi(x,t)=C_1X(x)+at+b.$$

Аналогичные рассмотрения для другого случая приведут к решению следующего вида:

$$\varphi(x,t)=C_1T(t)+ax+b.$$

Для выделения решений, которые удовлетворяют начальным и краевым условиям, нужно потребовать выполнения условий (2–3). Вместе с тем уравнение Монжа-Ампера является уравнением второго порядка и необходимы еще ограничение на искомое решение. Получим его из уравнения ионно-лучевого травления (1). Это уравнение справедливо для каждой точки области, в которой оно рассматривается, естественно оно имеет место и при $t=0$:

$$\varphi_t(x,0)=-f\left(\theta\big(\varphi_x(x,0)\big)\right)\sqrt{1+\varphi_x^2(x,0)}.$$

Стоит заметить, что для произвольного начального условия выписать точную формулу, которая дает решение, является весьма трудной задачей.

Можно лишь надеяться, что при некоторых $g(x)$ удастся подобрать нужное семейство решений и определить параметры, однозначно выделяющее искомую функцию из найденного семейства.

Сведение к гиперболическому уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Заметим, что к уравнению Монжа-Ампера приводят различные нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка. Рассмотрим уравнение (11):

$$P(\varphi_t) + Q(\varphi_x) = 0, \qquad (11)$$

где $P(z), Q(z) -$ произвольные дифференцируемые функции одной переменной. Будем использовать тот же прием, что и ранее, продифференцируем уравнение (11) по t:

$$P'(\varphi_t)\varphi_{tt} + Q'(\varphi_x)\varphi_{xt} = 0, \qquad (12)$$

теперь продифференцируем (11) по x:

$$P'(\varphi_t)\varphi_{tx} + Q'(\varphi_x)\varphi_{xx} = 0. \qquad (13)$$

Далее, выразим $Q'(\varphi_x)$ из уравнения (12) $Q'(\varphi_x) = -\frac{P'(\varphi_t)\varphi_{tt}}{\varphi_{xt}}$, после подстановки в (12) получаем $P'(\varphi_t)\varphi_{tx} - \frac{P'(\varphi_t)\varphi_{tt}}{\varphi_{xt}}\varphi_{xx} = 0$, и окончательно снова появляется уравнение Монжа-Ампера:

$$\varphi_{tt}\varphi_{xx} - \varphi_{tx}^2 = 0.$$

С другой стороны, можно исключить величину φ_{xt}, то есть получаем уравнение:

$$\varphi_{tt} - \left(\frac{Q'(\varphi_x)}{P'(\varphi_t)}\right)^2 \varphi_{xx} = 0. \quad (14)$$

Данное уравнение является нелинейным гиперболическим уравнением второго порядка.

Заметим, что для модели ионно-лучевого травления имеем:

$$P(z) = z, \qquad Q(z) = f\big(\theta(z)\big)\sqrt{1+z^2}. \qquad (15)$$

С учетом (15) в уравнении (14) получаем:

$$\left(\frac{Q'(\varphi_x)}{P'(\varphi_t)}\right)^2 = \frac{\Big(f'\big(\theta(z)\big)\theta'(z)(1+z^2) + f\big(\theta(z)\big)z\Big)^2}{1+z^2}\Bigg|_{z=\varphi_x}. \qquad (16)$$

Далее, естественной задачей является получение точных модельных решений. Для этого попробуем свести нелинейное уравнение (14) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого потребуем выполнения равенства:

$$\left(\frac{Q'(\varphi_x)}{P'(\varphi_t)}\right)^2 = A^2, \qquad (17)$$

где $A \in \mathbb{R}$ и из (16) получаем уравнение на $f\big(\theta(z)\big)$:

$$\frac{df\big(\theta(z)\big)}{dz}(1+z^2) + f\big(\theta(z)\big)z = A(1+z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (18)$$

которое является линейными обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, которое в рассматриваемом случае имеет точное решение:

$$f\big(\theta(z)\big) = \frac{Az + C}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (19)$$

где $C -$ произвольная постоянная. Стоит обратить внимание, что наличие в (19) двух констант позволяет рассматривать различные модели скорости травления.

При сделанном предположении возникает начально-краевая задача с неоднородными граничными условиями:

$$\varphi_{tt} - A^2\varphi_{xx} = 0, \qquad (20)$$

$$\varphi(x,0) = g(x), \qquad \varphi_x(0,t) = 0, \qquad \varphi(1,t) = -t.$$

К начальным условиям необходимо добавить условие на $\varphi_t(0,x)$:

$$\varphi_t(x,0) = -Ag'^2(x) - 1.$$

Для зануления краевых условий введем новую функцию $W(x,t) = \varphi(x,t) + t$.

Тогда получим новую линейную начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$W_{tt} - A^2 W_{xx} = 0, \qquad (21)$$

$$W_x(0,t) = 0, \qquad W(1,t) = 0, \qquad (22)$$

$$W(x,0) = g(x), \qquad W_t(x,0) = -Ag'^2(x). \quad (23)$$

Для построения решения задачи (21)-(23) возможно применить стандартный метод разделения переменных, который дает следующий результат:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \cos \frac{A\pi n}{2} t + C_{2n} \sin \frac{A\pi n}{2} t \right) \cos \frac{\pi n x}{2}, \qquad (24)$$

где константы определяются равенствами (25):

$$C_{1n} = \int_0^1 g(s) \cos \frac{\pi n s}{2} ds, \qquad C_{2n} = -A \int_0^1 g'^2(s) \cos \frac{\pi n s}{2} ds. \quad (25)$$

В итоге получаем выражение для функции профиля:

$$\varphi(x,t) = -t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \cos \frac{A\pi n}{2} t + C_{2n} \sin \frac{A\pi n}{2} t \right) \cos \frac{\pi n x}{2}.$$

Заключение

В работе рассмотрена модель процесса ионно-лучевого травления, которая описывается нелинейным гиперболическим уравнением первого порядка. Для этого уравнения показана его возможность сведения к одномерному уравнению Монжа-Ампера и к нелинейному гиперболическому уравнению второго порядка. Установлен обширный класс уравнений первого порядка, уравнения из которого также могут быть приведены к уравнению Монжа-Ампера, для которого предъявлены некоторые семейства точных решений. Показано, что эти семейства могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными. Сформулированы условия для выделения решений из этих семейств, которые соответствуют заданным условиям.

Литература

1. Muravey L. A., Petrov V. M. Optimal Control of Technological Processes in Microelectronics. Interpribor-90, Moscow, 1990, pp. 51–53.
2. Гурченков А.А., Муравей Л.А., Романенков А.М. Моделирование и оптимизация технологического процесса ионно-лучевого травления. Инженерный журнал: наука и инновации, 2014, вып. 1. URL: engjournal.ru/catalog/ machin/eleng/1211.html
3. Muravey L. A., Petrov V. M. Coefficient Control for Some Nonlinear Hyperbolic Equation. 1062nd AMS MEETING, Syracuse University. Syracuse, New York, 2010, p. 34–35.
4. Khabirov, S. V., Nonisentropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Ampere equation, [in Russian], Mat. Sbornik, Vol. 181, No. 12, pp. 1607–1622, 1990.
5. Клячин В. А., Казанин М. И., Построение решений уравнения типа Монжа– Ампера на основе Ф-триангуляции, Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ., 2017, выпуск 1(38), 6–12 DOI: doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.1
6. Аминов Ю. А. О полиномиальных решениях уравнения Монжа–Ампера, Матем. сб., 2014, том 205, номер 11, 3– 38 DOI: doi.org/10.4213/sm8356
7. Шабловский О. Н. Параметрические решения уравнения Монжа–Ампера и течения газа с переменной энтропией, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2015, номер 1(33), 105–118 DOI: doi.org/10.17223/19988621/33/11
8. Tunitsky D. V. Multivalued solutions of hyperbolic Monge-Ampère equations: solvability, integrability, approximation, *Sb. Math.*, 2020, 211:3, 373–421

9. Кокарев В. Н. Полные выпуклые решения уравнений типа Монжа—Ампера и их аналогов, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018, том 147, 51–83
10. Mikhail B. Sheftel. Nonlocal symmetry of CMA generates ASD Ricci-flat metric with no Killing vectors. Mikhail B. Sheftel (Jul 16, 2020) Published in: J. Math. Phys. 2021, 62 1, 013504 e-Print: 2007.08424 [math-ph] URL: arxiv.org/pdf/2007.08424.pdf
11. Du, Shi-Zhong. Euclidean Complete Hypersurfaces of a Monge-Ampere Equation. (2021). URL: arxiv.org/pdf/2105.04243.pdf
12. Kawamata, M. and K. Shibuya. On a generalization of Monge--Amp\`ere equations and Monge--Amp\`ere systems. arXiv: Differential Geometry. 2020: n. pag. URL: arxiv.org/pdf/2008.10203.pdf
13. Genggeng Huang and Yingshu L¨u. Analyticity of the solutions to degenerate Monge-Amp`ere equations. URL: arxiv.org/pdf/2012.02656.pdf
14. Berjawi, S., Ferapontov E.V., Kruglikov B.S., Novikov V.S. Second-order PDEs in 3D with Einstein-Weyl conformal structure. 2021. URL: arxiv.org/pdf/2104.02716.pdf
15. Ibragimov, N. H. (Editor), CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press, Boca Raton, 1994. 448 Pages.
16. Polyanin, A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. 2012. DOI: doi.org/10.1201/b11412
17. Rakhmelevich I.V. On solutions of the Monge – Ampere equation with power-law non-linearity with respect to first derivatives. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2016. 4(42). pp. 33−43. DOI: 10.17223/19988621/42/4

References

1. Muravey L. A., Petrov V. M. Optimal Control of Technological Processes in Microelectronics. Interpribor-90, Moskva, 1990, pp. 51–53.
2. Gurchenkov A.A., Muravej L.A., Romanenkov A.M. Inzhenerny`j zhurnal: nauka i innovacii, 2014, vy`p. 1. URL: engjournal.ru/catalog/ machin/eleng/1211.html
3. Muravey L. A., Petrov V. M. Coefficient Control for Some Nonlinear Hyperbolic Equation. 1062nd AMS MEETING, Syracuse University. Syracuse, New York, 2010, p. 34–35.
4. Khabirov, S. V., Nonisentropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Ampere equation, [in Russian], Mat. Sbornik, Vol. 181, No. 12, pp. 1607–1622, 1990.
5. Klyachin V. A., Kazanin M. I., Postroenie reshenij uravneniya tipa Monzha–Ampera na osnove Ф-triangulyacii, Vestn. Volgogr. gos. un-ta. Ser. 1, Mat. Fiz., 2017, vy`pusk 1(38), 6–12 DOI: doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.1
6. Aminov Yu. A. O polinomial`ny`x resheniyax uravneniya Monzha–Ampera, Matem. sb., 2014, tom 205, № 11, 3– 38. DOI: doi.org/10.4213/sm8356
7. Shablovskij O. N. Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mex., 2015, nomer 1(33), 105–118 DOI: doi.org/10.17223/19988621/33/11
8. Tunitsky D. V. Multivalued solutions of hyperbolic Monge-Ampère equations: solvability, integrability, approximation, Sb. Math., 2020, 211:3, 373–421
9. Kokarev V. N. Polny`e vy`pukly`e resheniya uravnenij tipa Monzha—Ampera i ix analogov, Itogi nauki i texn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz., 2018, tom 147, 51–83
10. Nonlocal symmetry of CMA generates ASD Ricci-flat metric with no Killing vectors. URL: arxiv.org/pdf/2007.08424.pdf

11. Euclidean Complete Hypersurfaces of a Monge-Ampere Equation. URL: arxiv.org/pdf/2105.04243.pdf
12. On a generalization of Monge--Amp\`ere equations and Monge--Amp\`ere systems. URL: arxiv.org/pdf/2008.10203.pdf
13. Analyticity of the solutions to degenerate Monge-Amp`ere equations. URL: arxiv.org/pdf/2012.02656.pdf
14. Second-order PDEs in 3D with Einstein-Weyl conformal structure. 2021. URL: arxiv.org/pdf/2104.02716.pdf
15. Ibragimov, N. H. (Editor), CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press, Boca Raton, 1994. 448 Pages.
16. Polyanin, A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. 2012. DOI: doi.org/10.1201/b11412
17. Rakhmelevich I.V. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2016. 4(42). pp. 33−43 DOI: 10.17223/19988621/42/4.