

## К расчету на устойчивость П-образной рамы с шарнирным опиранием

*А.Д. Ловцов*

*Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск*

**Аннотация:** Рассматривается расчет на устойчивость П-образной шарнирно опертой рамы. Введено понятие  $\rho$ -подобных рам, как рам с одинаковым отношением  $\rho$  погонных жесткостей ригеля и стойки. Показано, что параметр  $\nu_{cr}$ , определяющий критическую нагрузку на раму, одинаков для  $\rho$ -подобных рам. Получены приближенные формулы, позволяющие определить критический параметр нагрузки  $\nu_{cr}$  и расчетные длины сжатых стержней с погрешностью не более 2%.

**Ключевые слова:** плоская рама, устойчивость, критическая сила, коэффициент приведенной длины,  $\rho$ -подобные рамы, аппроксимация, метод наименьших квадратов.

Причинами отказов конструкции в 18 – 51% случаев являются ошибки проектирования [1]. Для металлических конструкций потеря устойчивости является причиной отказов в 22 – 44% случаев. На этапе эскизного проектирования важно иметь простые способы определения расчетных длин сжатых элементов конструкции таких, например, как: крестовые решетки [2]; рамы правильного многоугольного очертания [3]; колонны, балки, плиты [4, 5], частные случаи рам [6]. В статье [7] для однопролетной двухэтажной шарнирно опертой рамы удалось получить простое выражение для параметра  $\nu_{cr}$ , определяющего критическую нагрузку на раму. В настоящей статье показано получение аналогичной зависимости для П-образной рамы.

Рассмотрим одноэтажную однопролетную раму с шарнирным опиранием стоек (рис. 1).

### **Изменение критической нагрузки на этаж при произвольном распределении сил, сжимающих стойки рамы.**

В случае многоэтажных многопролетных рам величина критической нагрузки на раму  $F_{cr}$  зависит от распределения сил  $F_j$  по узлам рамы [9, 10].

Для рассматриваемой же рамы замечено, что распределение сжимающих стойки сил  $F_1 = \alpha F$ ,  $F_2 = (1 - \alpha)F$  ( $\alpha \leq 1$ ) практически не влияет

на величину равнодействующей  $R_{cr} = F_{1cr} + F_{2cr} = F_{cr}$  этих сил. Минимальное значение  $R_{cr}^{min}$  наблюдается при загрузке одной стойки (рис. 1, а), максимальное значение  $R_{cr}^{max}$  – при загрузке стоек двумя одинаковыми силами (рис. 1, б). Равнодействующая  $R_{cr}$ , именуемая в дальнейшем «нагрузка на этаж», для всех остальных комбинаций загрузки лежит в пределах  $R_{cr}^{min} \leq R_{cr} \leq R_{cr}^{max}$ .

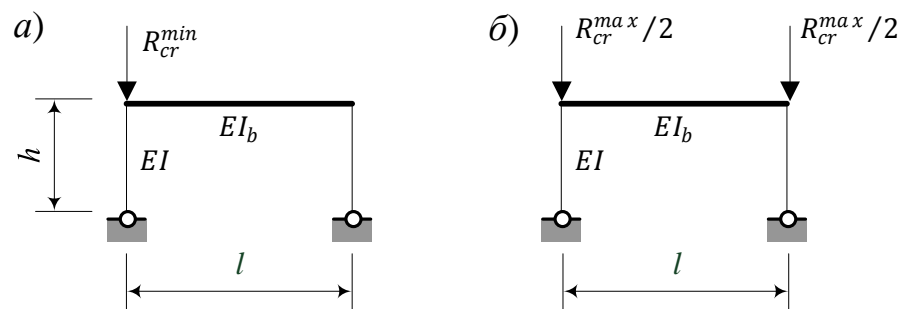


Рис. 1. Расчетная схемам рамы. Варианты загрузки:  
а) минимальная нагрузка на этаж;  
б) максимальная нагрузка на этаж

При этом  $R_{cr}^{min}$  незначительно отличается от  $R_{cr}^{max}$ . Как показывают расчеты, это отличие составляет не более 2%.

Таким образом, если определить  $F_{cr}$  при загрузке одной стойки, то, тем самым, оказывается с достаточной точностью определена  $R_{cr} \approx F_{cr}$  для всех прочих загрузок.

### **$\rho$ -подобные рамы**

Возникает соблазн решить аналитически задачу для рассматриваемой рамы, загруженной одной силой  $F$ , и, тем самым, получить решение для целой группы задач.

Используем классический метод перемещений [6, 8]. Обозначим:  $l, EI_b, i_b = EI_b/l$  – пролет рамы, абсолютная и погонная жесткость ригеля;  $h, EI, i = EI/h$  – высота, абсолютная и погонная жесткость стоек;  $\rho = i_b/i$  – отношение погонных жесткостей ригеля и стойки;  $v = h\sqrt{F/EI}$ ;  $\varphi_1(v) =$

$\frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ ,  $\vartheta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}$  – функции, применяемые при расчете на устойчивость методом перемещений («поправочные коэффициенты»).

Для основной системы метода перемещений обозначим  $z_1, z_2$  – угловые перемещения левого и правого жестких узлов рамы,  $z_3$  – линейное перемещение ригеля. Тогда матрица жесткости

$$R(v, i, i_b, h) = \begin{pmatrix} 3i\varphi_1(v) + 4i_b & 2i_b & -3i\varphi_1(v)/h \\ 2i_b & 3i + 4i_b & -3i/h \\ -3i\varphi_1(v)/h & -3i/h & 3i\vartheta_1(v)/h^2 + 3i/h^2 \end{pmatrix}$$

или, с учетом  $i_b = \rho i$ ,

$$R(v, i, \rho, h) = i \begin{pmatrix} 3\varphi_1(v) + 4\rho & 2\rho & -3\varphi_1(v)/h \\ 2\rho & 3 + 4\rho & -3/h \\ -3\varphi_1(v)/h & -3/h & 3\vartheta_1(v)/h^2 + 3/h^2 \end{pmatrix}$$

Определитель

$$D(v, i, \rho, h) = |R(v, i, \rho, h)| = \frac{i^3}{h^2} D^*(v, \rho),$$

где

$$D^*(v, \rho) = (4\rho v^2 - 12\rho^2 - 36\rho + 3v^2)\varphi_1(v) + 4\rho^2 v^2 - 12\rho^2 + 4\rho v^2.$$

Следовательно, уравнение устойчивости, переписанное в виде

$$D^*(v_{cr}, \rho) = 0, \quad (1)$$

задает неявную функцию  $v_{cr} = v_{cr}(\rho)$ .

Получить аналитическое выражение для  $v(\rho)$  не представляется возможным. Однако можно сделать вывод о том, что критический параметр  $v_{cr}$  зависит только от отношения погонных жесткостей ригеля и стойки.

Следовательно, для множества рам с одинаковым отношением  $\rho$  и одинаковым распределением нагрузки (одинаковым коэффициентом  $\alpha=1$ ) параметр  $v_{cr}$  останется неизменным. Нагрузка на этаж при этом  $F_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EI}{h^2}$ .

Назовем такое множество рам –  $\rho$ -подобными рамами.

Коротко говоря – критический параметр  $v_{cr}$  для  $\rho$ -подобных рам одинаков.

Например, рама с  $l_1 = 18, h_1 = 3, EI_{b1} = 3EI$  ( $\rho_1 = \frac{EI_b h}{l EI} = \frac{3EI \cdot 3}{18 EI} = \frac{1}{2}$ ) подобна в указанном смысле раме с  $l_2 = 3, h_2 = 6, EI_{b2} = EI/4$  ( $\rho_2 = \frac{EI_b h}{l EI} = \frac{EI/4 \cdot 6}{3 EI} = \frac{1}{2}$ ).

Критические силы, однако, будут различными, поскольку  $F_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EI}{h^2}$ , а жесткость  $EI$  и высота  $h$  стоек отличаются одна от другой для  $\rho$ -подобных рам. Так, для описанных выше рам, критическая сила в первом случае будет в 4 раз больше, чем во втором ( $\frac{F_{cr1}}{F_{cr2}} = \frac{v_{cr1}^2 EI}{h_1^2} \frac{h_2^2}{v_{cr2}^2 EI} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$ ).

### Аппроксимация зависимости $v_{cr} = v_{cr}(\rho)$

Поскольку нелинейное уравнение (1) не поддается аналитическому решению, построим искомую зависимость  $v_{cr} = v_{cr}(\rho)$  на основе численного решения уравнения (1). Для этого проведем серию расчетов для рамы, меняя в ней только жесткость ригеля  $EI_b$ , а вместе с ней и отношение погонных жесткостей  $\rho = 1 \times 10^m$ . Сведем результаты серии расчетов в таблицу, фрагмент которой показан на рис. 2, а. Графически эти результаты удобно представить в логарифмической шкале (рис. 2, б).

Прокомментируем график, полученный по результатам численного эксперимента.

При  $\rho \rightarrow 0$  имеем предельный случай ригеля бесконечно малой жесткости на изгиб и бесконечно большой жесткости на растяжение/сжатие. Расчетная схема такой рамы приближается к механизму с ригелем, шарнирно соединенным со стойками. Критическая сила при этом стремится к нулю.

При  $\rho \rightarrow \infty$  имеем предельный случай ригеля абсолютно жесткого на изгиб и на растяжение/сжатие (рис. 3). Для этой рамы решением уравнения устойчивости  $\eta_1(v) + 1 = 0$  является значение  $v_{cr} = 2.203644 = 0.701\pi \approx 0.7\pi$ .

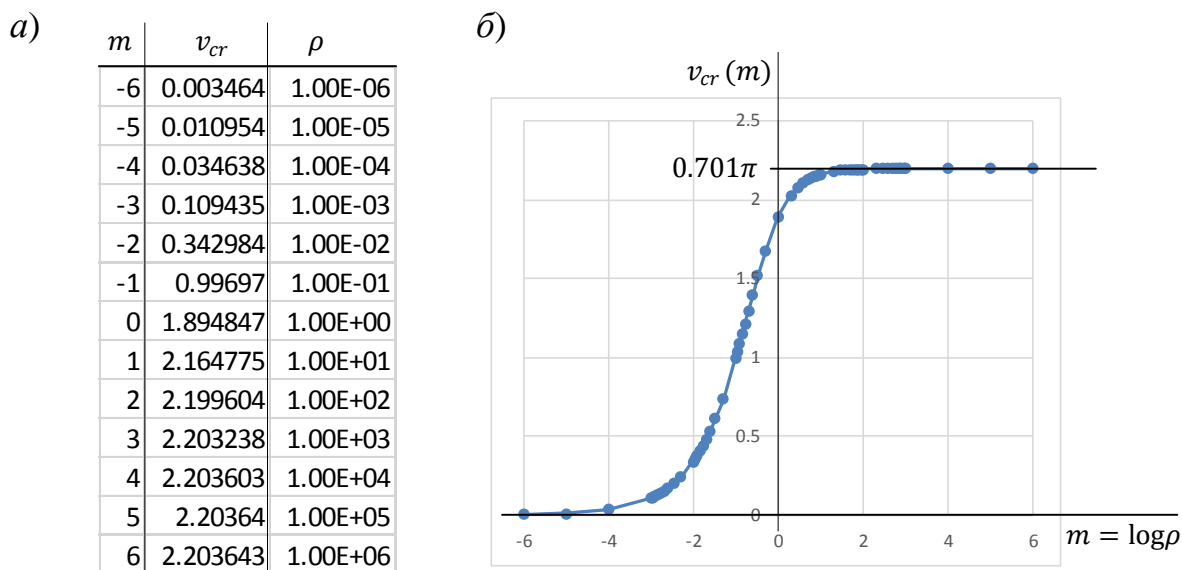


Рис. 2. Результаты численного эксперимента:  
табличное – а) и графическое – б) представление результатов

Таким образом, критический параметр  $v_{cr}$  лежит в пределах  $0 \leq v_{cr} \leq 0.7\pi$  (рис. 2, б).

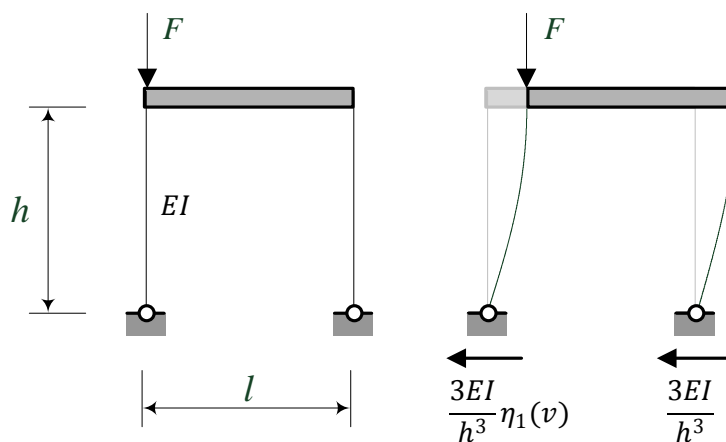


Рис. 3. Шарнирно опертая рама с бесконечно жестким ригелем.

На отрезке от  $-6 \leq m \leq -4$  параметр  $v_{cr}$  близок к нулю. На отрезке от  $3 \leq m \leq 6$  параметр  $v_{cr}$  практически не меняется и близок к предельному  $0.7\pi$  (см. рис. 2).

На отрезке  $-4 \leq m \leq 3$  зависимость  $v_{cr} = v_{cr}(\log \rho) = v_{cr}(m)$  была аппроксимирована (с использованием метода наименьших квадратов) выражением следующего вида:

$$v_{cr}(m) = \begin{cases} 1.247 + 0.994 \operatorname{arctg}(1.025m + 0.768) & \text{при } m < 0, \\ 1.977 + 0.160 \operatorname{arctg}(2.909m - 0.554) & \text{при } m \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

График этой функции представлен на рис. 4 (крестиками показаны результаты численного эксперимента, сплошной линией – аппроксимация (2)). Погрешность определения критической силы  $F_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EI}{h^2}$  (с использованием аппроксимации  $v_{cr}$  согласно (2) при загрузении одной стойки и при  $0.01 \leq \rho \leq 1000$  составит не больше 1%.

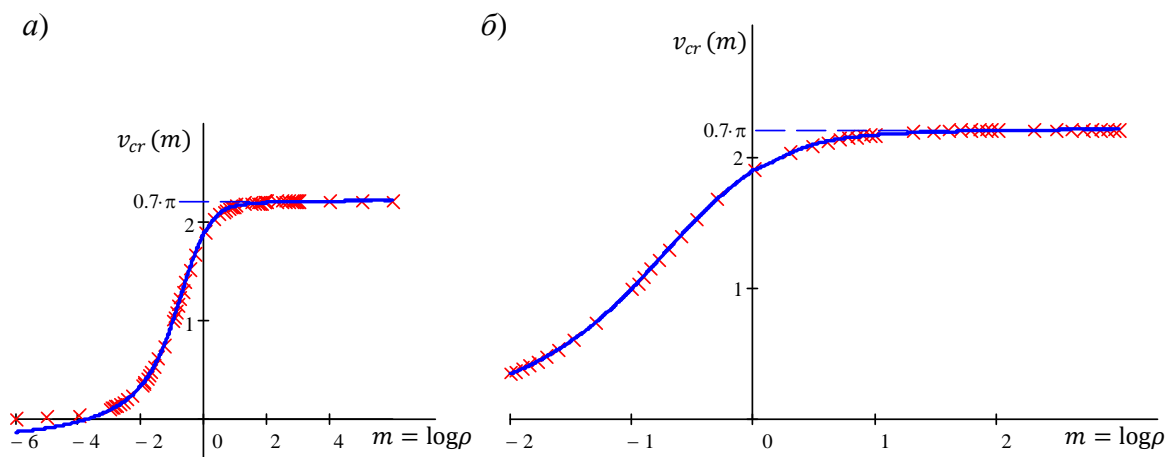


Рис. 4. Аппроксимация (сплошная линия) результатов численного эксперимента (×):

а) – на интервале  $-6 \leq m \leq 6$ ;

б) – на практически значимом интервале  $-2 \leq m \leq 3$

### Алгоритм расчета на устойчивость:

1. по данным расчетной схемы определяем относительную погонную жесткость ригеля  $\rho = \frac{EI_r h}{EI}$  и  $m = \log \rho$ ;
2. по зависимости (2) определяем значение параметра  $v_{cr} = v_{cr}(m)$ ;
3. определяем нагрузку на этаж  $F_{cr} = \frac{v_{cr}^2 EI}{h^2}$ ;

4. распределяем нагрузку на этаж по стойкам: задаем  $\alpha$ ;

5. определяем  $v_1 = h \sqrt{\frac{F_1}{EI}} = h \sqrt{\frac{\alpha F_{cr}}{EI}} = h \sqrt{\frac{\alpha v_{cr}^2 EI}{h^2 EI}} = v_{cr} \sqrt{\alpha}$ ,  $v_2 = v_{cr} \sqrt{1 - \alpha}$ ;

6. определяем коэффициенты приведенных длин  $\mu_1 = \frac{\pi}{v_1}$ ,  $\mu_2 = \frac{\pi}{v_2}$ .

Ясно, что изменением жесткости ригеля можно «регулировать» величину критической силы. Отсюда возникает следующая задача.

### Обратная задача

Пусть для рассматриваемой рамы заданы пролет  $l$ , высота  $h$ , жесткость стойки  $EI$  и предполагаемая критическая нагрузка на этаж  $R_{cr}$ . Требуется определить жесткость ригеля, обеспечивающую устойчивость рамы при  $F < R_{cr}$ .

Предлагается следующий алгоритм решения задачи:

1. по заданным параметрам задачи определяем  $v_{cr} = h \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}}$ ;
2. по найденному  $v_{cr}$  определяем  $m = \log \rho$ , используя (2) и рис. 4. б;
3. определяем  $\rho = 10^m$ .
4. из равенства  $\rho = i_b/i = \frac{EI_b}{l} \frac{h}{EI_c}$  определяем жесткость ригеля  $EI_b = \frac{l}{h} \rho EI$ .

### Пример

Рассмотрим три  $\rho$ -подобных рамы с  $\rho = 0.5$  (рис. 5).

Реализуем приведенный выше алгоритм расчета на устойчивость для рамы на рис. 5. а:

1.  $\rho = \frac{EI_r h}{EI l} = \frac{3EI \cdot 3}{EI \cdot 18} = \frac{1}{2}$ ,  $m = \log 0.5 = -0.30103$ ;

2.  $v_{cr} = v_{cr}(m) = 1.675096$ ;

3.  $F_{cr} = \frac{v_{cr}^2 EI}{h^2} = 2.805946 \cdot \frac{EI}{h^2}$ ;

4. Полагаем  $\alpha = 1/3$ ;

5.  $v_1 = v_{cr} \sqrt{\alpha} = 0.967117$ ,  $v_2 = v_{cr} \sqrt{1 - \alpha} = 1.36771$ ;

$$б. \mu_1 = \frac{\pi}{v_1} = 3.24841, \quad \mu_2 = \frac{\pi}{v_2} = 2.296973.$$

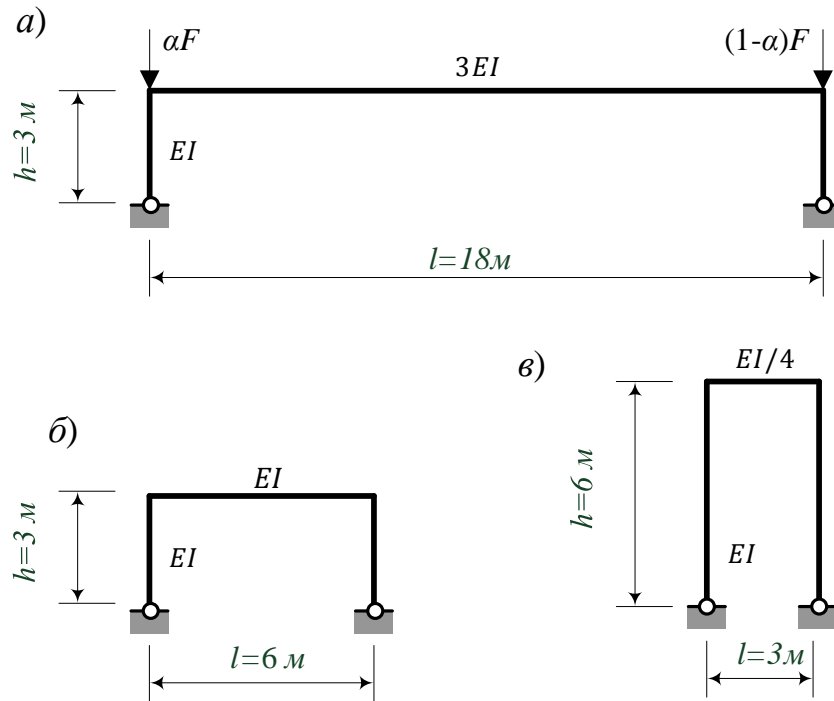


Рис. 5. Расчетные схемы  $\rho$ -подобных рам ( $\rho = 0.5$ )

Ясно, что для двух других рам результаты выполнения первых 4-х пунктов приведенного расчета будут одинаковыми. Отличия появятся только в результатах выполнения п. п. 5, 6.

Для всех трех рам были проведены расчеты, результаты которых представлены в таблице, где приняты следующие обозначения.

$\bar{F}_{cr_a}$ ,  $\bar{F}_{cr_e}$  – приближенное и точное значение критической нагрузки на этаж (в долях от  $EI/h^2$ ).

$v_{cr_a}$ ,  $v_{cr_e}$  – приближенное и точное значение критического параметра.

$v_{cr1_a}$ ,  $v_{cr1_e}$ ,  $v_{cr2_a}$ ,  $v_{cr2_e}$  – приближенное и точное значение критического параметра для левой (индекс «1») и правой (индекс «2») стоек.

$\mu_{1_a}$ ,  $\mu_{1_e}$ ,  $\mu_{2_a}$ ,  $\mu_{2_e}$  – приближенное и точное значение коэффициента приведенной длины для левой (индекс «1») и правой (индекс «2») стоек.

Таблица



## Результаты расчетов

$\alpha$	$v_{cr\_a}$	$v_{cr\_e}$	$\bar{F}_{cr\_a}$	$\bar{F}_{cr\_e}$	$v_{cr1\_a}$	$v_{cr1\_e}$	$v_{cr2\_a}$	$v_{cr2\_e}$	$\mu_{1\_a}$	$\mu_{1\_e}$	$\mu_{2\_a}$	$\mu_{2\_e}$
1		1.680		2.823	1.675	1.6802	-	-	1.876	1.870	-	-
1/2	1.675	1.686	2.806	2.844	1.184	1.1925	1.1845	1.1925	2.652	2.636	2.652	2.635
1/3		1.686		2.842	0.9672	0.9732	1.3677	1.3764	3.248	3.228	2.297	2.282

По результатам приведенных расчетов можно сделать следующие **выводы**.

Приближенные значения  $v_{cr}$  и  $\bar{F}_{cr}$  (в долях от  $EI/h^2$ ) для всех  $\rho$ -подобных рам при любом распределении нагрузки, не меняются, поскольку отношение погонных жесткостей ригеля и стойки для всех рам одинаковы.

Точные значения  $v_{cr}$ ,  $\bar{F}_{cr}$  (в долях от  $EI_c/h^2$ ), коэффициенты приведенных длин  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  при заданном распределении сил (при заданном  $\alpha$ ) не меняются для всех  $\rho$ -подобных рам.

Подчеркнем, что величины собственно критических сил для всех рам и разных  $\alpha$  будут отличаться.

При изменении распределения сил по стойкам рамы точные решения незначительно отличаются один от другого и от приближенного решения (не больше, чем на 2 %).

Получена приближенная формула для П-образной шарнирно опертой рамы, позволяющая определить критический параметр нагрузки  $v_{cr}$  и расчетные длины сжатых стержней («в запас») с погрешностью не более 2%.

## Литература

1. Арушонок Ю.Ю. Об ошибках проектирования строительных конструкций // Инженерный вестник Дона, 2021, №11. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285)

2. Лиманцев А.А. Универсальные формулы для определения расчетной длины элементов крестовой решетки // Инженерный вестник Дона, 2021, №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951)
  3. Журавлев Д.А. Упругая устойчивость статически неопределимой стержневой конструкции многоугольной конфигурации // Инженерный вестник Дона, 2019, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564)
  4. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. P. 692.
  5. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. P. 642.
  6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. д-ра техн. наук И. А. Биргера и чл.-кор. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 569 с.
  7. Ловцов А. Д., Мишакин, И. Е. Ю.А. Пак Ю. А. К определению критической нагрузки на однопролетную двухэтажную шарнирно опертую раму // Инженерный вестник Дона, 2022, №7. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2022/7803](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2022/7803)
  8. Смирнов А.Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.
  9. Дворников В. А., Ловцов А. Д., Чернобров Е. О. Влияние схемы нагружения на величину критической силы для многопролетной многоэтажной плоской рамы / Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – Вып. 15. – С. 345 –347
  10. Дворников В. А., Ловцов А. Д., Чернобров Е. О. Влияние схемы нагружения на расчетные длины стержней многопролетной многоэтажной
-

рамы / Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научнопрактической конференции. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – Вып. 16. – С. 460 – 462

### References

1. Arushonok YU. YU. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. №11. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285).
2. Limancev A. A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951).
3. Zhuravlev D.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564).
4. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. p. 692.
5. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. p. 642.
6. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. [Strength, stability, vibrations] Spravochnik v trekh tomah. Tom 3. Pod red. d-ra tekhn. nauk I. A. Birgera i chl.-kor. AN Latvijsskoj SSR YA. G. Panovko. M.: Mashinostroenie, 1968. p. 569.
7. Lovcov A. D., Mishakin I. E., Pak Ju. A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022, №7. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2009/250/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2009/250/).
8. Smirnov A.F., Aleksandrov A. V., Lashhenikov B. Ja., Shaposhnikov N. N. Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij. [Structural Mechanics. Dynamics and Stability of Structures] M.: Strojizdat, 1984. p. 415.
9. Dvornikov V. A., Lovcov A. D., Chernobrov E. O. Dal'nij Vostok: problemy razvitiya arhitekturno-stroitel'nogo i dorozhno-transportnogo kompleksa: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Khabarovsk, 2015, Release. 15. pp. 345–347.



10. Dvornikov V. A., Lovcov A. D., Chernobrov E. O. Dal'nij Vostok: problemy razvitiya arhitekturno-stroitel'nogo i dorozhno-transportnogo kompleksa : materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Khabarovsk, 2016, Release. 16. pp. 460–462

**Дата поступления: 14.07.2024**

**Дата публикации: 2.09.2024**