

## Решение плоской контактной задачи методом конечных элементов

А.М. Филипов<sup>1</sup>, М.В. Хоменко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ВолгГАСУ, Волгоград

<sup>2</sup> Государственный университет по землеустройству, Москва

**Аннотация:** В настоящей работе предложен способ решения плоской контактной задачи методом конечных элементов. Представлены алгоритмы определения контактирующих пар узел – ответная поверхность и формирования глобальной матрицы жесткости для программного комплекса Mathcad.

**Ключевые слова:** решение контактной задачи, плоское напряженно деформированное состояние, метод конечных элементов, Mathcad.

Периодически в расчетной практике возникает ситуация, когда необходимо более точно определить зону приложения нагрузки – решить контактную задачу [1,2]. Решение этих задач возможно в аналитическом [3,4] и численном варианте [5,6]. Известные программные комплексы имеющие возможность анализа контактного взаимодействия не всегда применимы ввиду имеющих каких-либо особенностей. В данной статье авторами рассматривается численное решение плоской контактной задачи методом конечных элементов (МКЭ) взаимодействия пряди каната 15К7 с телом бетонной оболочки (далее основной конструкции) при выполнении преднапряжения конструкции без последующего инъецирования каналообразователя. Тип контактного взаимодействия – узел-поверхность, тип конечных элементов (далее КЭ) – линейный трехузловой [7,8].

Постановка задачи заключается в следующем: в результате натяжения преднапрягаемой арматуры (канат 15К7) происходит надавливание прядей на стенку каналообразователя. При этом в теле основной конструкции возникают вертикальные и горизонтальные перемещения, и, соответственно, деформации  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  и напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Перемещения по нормали к поверхности контакта совпадают из условия непроникновения одного из контактирующих тел (далее домена) в другое [5,9], по касательной к

поверхности зоны контакта – из условия равновесия действия сил трения между контактирующими поверхностями, тогда для контактирующих поверхностей:

$$u_{cont} = u_{targ}; \quad v_{cont} = v_{targ}, \quad (1)$$

где,  $u_{cont}$ ,  $v_{cont}$  – горизонтальное и вертикальное перемещение штампа соответственно,  $u_{targ}$ ,  $v_{targ}$  – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение тела основной конструкции. Т.е. при выполнении расчета с применением МКЭ необходимо связать перемещения соответствующих узлов обоих доменов, а так как расчет проводится итерационным способом, то, соответственно, необходимо выполнять обновление связей между узлами на каждой итерации в соответствии с перемещениями, полученными на предыдущей итерации.

Определение контактирующих узлов можно рассмотреть на примере рис. 1. В данном случае контактирующие узлы штампа имеют номера 2.1–2.5, ответной поверхности – 1.1–1.4. Первоначально, для каждого узла штампа на основе текущих координат узлов обоих доменов производится поиск элемента, с которым он, предположительно, может взаимодействовать. В рассматриваемом примере: для узла 2.1 – элемент с узлами 1.1 и 1.2, для 2.2 и 2.3 – элемент с узлами 1.2 и 1.3, для 2.4 и 2.5 – элемент с узлами 1.3 и 1.4. Далее определяется расстояние между узлом поверхности штампа и соответствующей точкой на ответном элементе ( $+Y_1...+Y_5$  соответственно), при сравнении которого с допустимой величиной отклонения в расстояниях –  $c_{tol}$ , определяется статус контактного взаимодействия: узел поверхности штампа контактирует с ответной поверхностью или нет, а так же коэффициент линейной интерполяции. Одним из вариантов взаимного расположения узлов может быть ситуация, когда переместившись, узел контактной поверхности штампа попадает в пространство во внутреннее пространство основной конструкции на расстояние, превышающее  $c_{tol}$ , т.е.

описанный выше алгоритм покажет в качестве результата отсутствие контактного взаимодействия (см. рис.1 узел 2.4). В этом случае существует два решения:

- поиск токи пересечения элементов, содержащих данный узел с соседними элементами ответной поверхности;
- сравнение знаков  $Y_i$  соседних узлов, в этом случае всем узлам контактирующей поверхности штампа, находящимся на расстоянии от ответной поверхности не превышающим  $c_{tol}$ , назначается фиксированное значение  $Y_i$ .

Второй вариант представляется более предпочтительным с точки зрения объемов вычислений.

Описанный выше алгоритм реализован в системе Mathcad [10] в виде функции, ее листинг приведен на рис.2. Было принято, что исходя из соразмерности размеров КЭ контактирующих поверхностей обоих доменов, каждый узел любой из рассматриваемых поверхностей связан с двумя узлами ответной, а так же, что величина значения  $c_{tol} = 0,001$  мала для внесения в результат расчета ощутимой погрешности. Возвращаемый функцией массив имеет число строк, равное числу узлов, и 4 столбца – это 2 пары значений: узел ответной поверхности – к-нт линейной интерполяции.

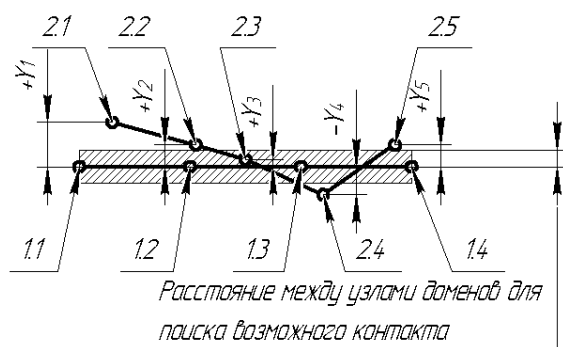


Рис. 1 – схема определения статуса контактного взаимодействия узлов штампа и ответной поверхности

```

c_cnt(node_n) := for i1 ∈ 1 .. rows(cnt)
                 | cti1 ← 0
                 | for i2 ∈ 1 .. rows(trg)
                 |   ntx ← (node_nelemtrgi2,6,2 - c_tll node_nelemtrgi2,7,2 + c_tll)T
                 |   nty ← (node_nelemtrgi2,6,3 - c_tll node_nelemtrgi2,7,3 + c_tll)T
                 |   cti1 ← trgi2 if min(ntx) ≤ node_ncnti1,2 ∧ node_ncnti1,2 ≤ max(ntx) ∧ min(nty) ≤ node_ncnti1,3 ∧ node_ncnti1,3 ≤ max(nty)
                 | for i1 ∈ 1 .. rows(cnt)
                 |   yti1 ← 0
                 |   yti1 ←  $\left( \frac{\text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},7},3} - \text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},3}}{\text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},7},2} - \text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},2}} \right) \cdot \left( \text{node\_n}_{\text{cnt}_{i1},2} - \text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},2} \right) + \text{node\_n}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},3} - \text{node\_n}_{\text{cnt}_{i1},3}$  if cti1 > 0
                 | for i1 ∈ 1 .. R
                 |   for i2 ∈ 1 .. 4
                 |     k_cnti1,i2 ← 0
                 |   for i1 ∈ 1 .. rows(cnt)
                 |     dyi1 ← 0
                 |     dyi1 ← 1 if |yti1| < c_tll ∧ cti1 > 0
                 |     dyi1 ← 1 if i1 < rows(cnt) ∧ yti1 < 0 ∧ yti1+1 > 0 ∧ cti1 > 0
                 |     dyi1 ← 1 if yti1 < 0 ∧ yti1-1 > 0 ∧ i1 ≥ 2 ∧ cti1 > 0
                 |     if dyi1 = 1
                 |       | trace(cti1)
                 |       | k_cntcnti1,1 ← elemcti1,6
                 |       |   nodecnti1,2 - nodeelemcti1,6,2
                 |       | k1 ← 1 -  $\frac{\text{node}_{\text{cnt}_{i1},2} - \text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},2}}{\text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},7},2} - \text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},2}}$ 
                 |       |   nodeelemcti1,7,2 - nodecnti1,2
                 |       | k2 ← 1 -  $\frac{\text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},7},2} - \text{node}_{\text{cnt}_{i1},2}}{\text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},7},2} - \text{node}_{\text{elem}_{\text{ct}_{i1},6},2}}$ 
                 |       | k_cntcnti1,2 ← k1 + k_cntcnti1,2
                 |       | k_cntcnti1,3 ← elemcti1,7
                 |       | k_cntcnti1,4 ← k2 + k_cntcnti1,4
                 |       | k_cntelemcti1,6,1 ← cnti1
                 |       | k_cntelemcti1,6,2 ← k1 + k_cntelemcti1,6,2
                 |       | k_cntelemcti1,7,1 ← cnti1
                 |       | k_cntelemcti1,7,2 ← k2 + k_cntelemcti1,7,2
                 | k_cnt

```

Рис. 2 – листинг функции определения контактного взаимодействия

На основании данных, возвращаемых функцией  $c\_cnt()$ , строится глобальная матрица жесткости. Листинг данной функции приведен на рис.3.

```

Km(c_cnt) := MJS ← identity(2·R)·0
for n ∈ 1..M
  for i1 ∈ 1..3
    V2:i1-1 ← 2·ELn,i1+ind_1-1-1
    V2:i1 ← 2·ELn,i1+ind_1-1
    cx2:i1-1 ← |S2ELn,i1+ind_1-1-1|
    cx2:i1 ← |S2ELn,i1+ind_1-1-1|
    K ← Aen·BnT·D(En,νn)·Bn
    for i ∈ 1..6
      for j ∈ 1..6
        MJSVi,Vj ← MJSVi,Vj + Ki,j·cxi·cxj
        MJSVi,Vj ← 1 if cxi = 0 ∧ cxj = 0 ∧ i = j
      fl ← 0
    W ← (0 0 0 0 0 0)T
    for i1 ∈ 1..3
      if c_cntELn,i1+ind_1-1,1 > 0
        W2:i1-1 ← 2·c_cntELn,i1+ind_1-1,1-1 if S2c_cntELn,i1+ind_1-1,1-1 = 0
        W2:i1 ← 2·c_cntELn,i1+ind_1-1,1 if S2c_cntELn,i1+ind_1-1,1 = 0
        fl ← c_cntELn,i1+ind_1-1,2
      for i ∈ 1..6 if fl ≠ 0
        for j ∈ 1..6
          MJSWi,Wj ← MJSWi,Wj + Ki,j·fl if Wi ≠ 0 ∧ Wj ≠ 0
        fl ← 0
      W ← (0 0 0 0 0 0)T
      for i1 ∈ 1..3
        if c_cntELn,i1+ind_1-1,3 > 0
          W2:i1-1 ← 2·c_cntELn,i1+ind_1-1,3-1 if S2c_cntELn,i1+ind_1-1,3-1 = 0
          W2:i1 ← 2·c_cntELn,i1+ind_1-1,3 if S2c_cntELn,i1+ind_1-1,3 = 0
          fl ← c_cntELn,i1+ind_1-1,4
        for i ∈ 1..6 if fl ≠ 0
          for j ∈ 1..6
            MJSWi,Wj ← MJSWi,Wj + Ki,j·fl if Wi ≠ 0 ∧ Wj ≠ 0
      MJS

```

Рис. 3. – листинг функции формирования глобальной матрицы жесткости

Используемые массивы и переменные:

1. Ae – массив, содержащий площади КЭ;
2. B – массив, содержащий матрицы градиентов КЭ;

3.  $E$  – вектор, содержащий значение модуля упругости КЭ
4.  $EL$  – массив с номерами узлов для элементов, участвующих в расчете;
5.  $\nu$  – вектор, содержащий значения  $\nu$ -нта Пуассона КЭ
6.  $S$  – вектор закреплений, значение 1 указывает на закрепление соответствующего номера узла по соответствующему направлению
7.  $ind\_1$  – переменная, указывающая на начало перечисления узлов в описании элемента (обычно равна 6).

Сетка КЭ рассматриваемой задачи представлена на рис.4.

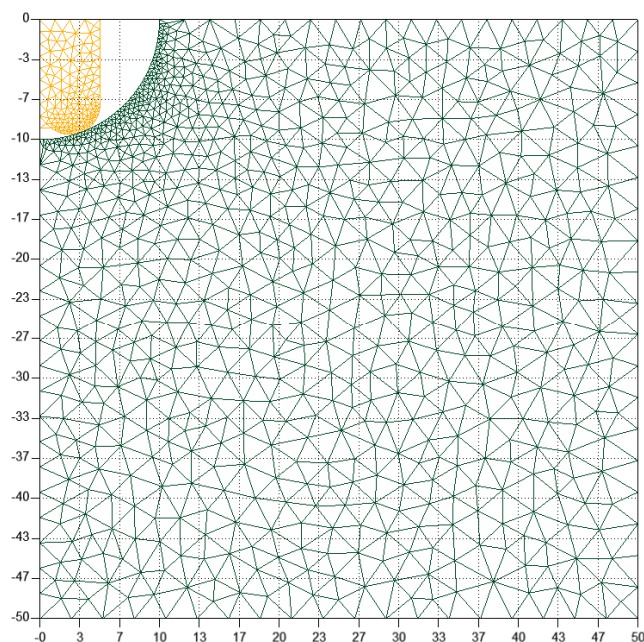


Рис. 4. – Общий вид сетки КЭ рассматриваемого фрагмента конструкции. Желтым цветом показан домен каната преднапряжения (штампа), зеленым – домен основной конструкции.

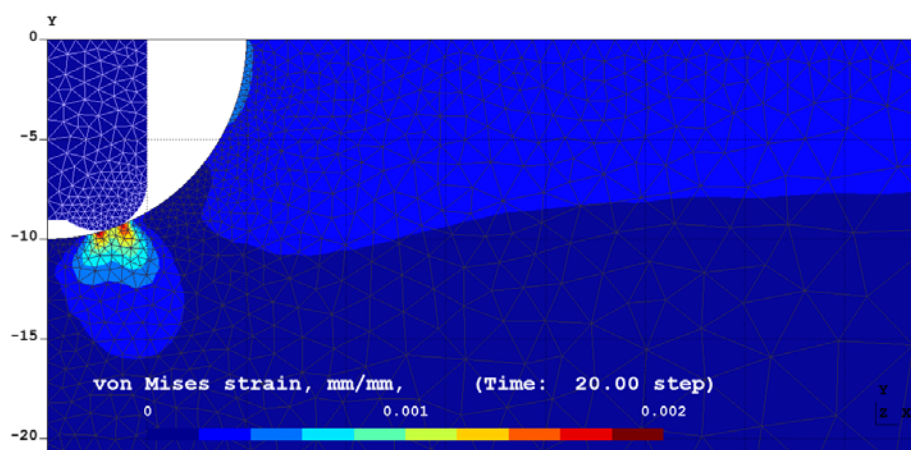
Имеет размеры 50x50мм, форма штампа, имитирующего канат преднапряжения упрощена с сохранением формы контактирующей поверхности. Характеристики материалов:

- $E_b = 30$  ГПа,  $\nu = 0,2$ ;

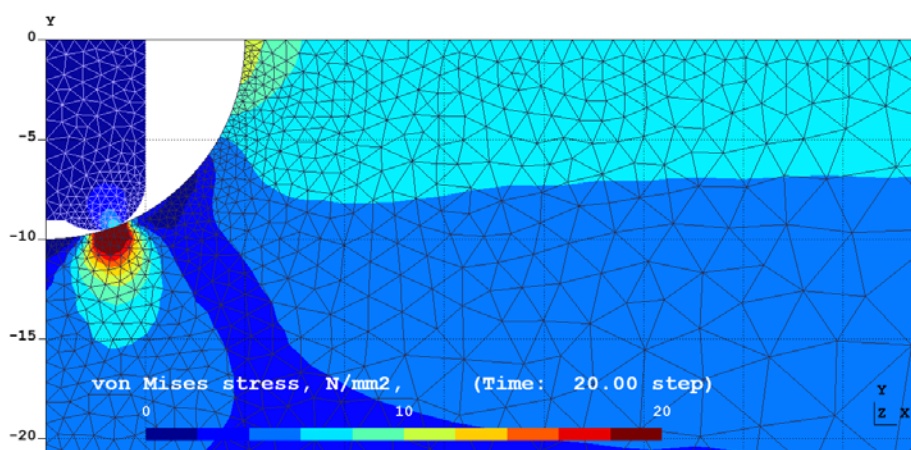
–  $E_s = 210$  ГПа,  $\nu = 0,3$ .

Приложенное давление по верхней плоскости штампа 6,3 МПа. Граничные условия по наружным поверхностям рассматриваемого фрагмента – симметрия в направлении соответствующей оси. Расчет выполняется итерационно, состоит из 20 итераций.

Результаты расчета представлены ниже на рис.5 а, б. Данные результаты совпадают с аналогичным численным экспериментом, проведенном в программном комплексе Autodesk Simulation Mechanical 2013.



а.



б.

Рис. 5. – Результаты расчета: а – напряжения по Мизесу, б – относительные деформации по Мизесу

## Литература

1. Бескопыльный А.Н., Веремеенко А.А. Задача о статическом внедрении конического индентора в область с радиальными начальными напряжениями // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2) URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368)
2. Чмшкян А.В. Взаимодействие конического штампа с неоднородным основанием // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2) URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391)
3. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 302 с.
4. Джонсон К., Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
5. Fischer-Cripps, A.C., 2007. Introduction to Contact Mechanics. Springer-Verlag US, 248 p.
6. Wriggers, P. and T.A. Laursen, 2008. Computational Contact Mechanics. Springer, 248 p.
7. Сабоннадьер Ж.К., Кулон Ж.Л. Метод конечных элементов и САПР: Пер. с франц.. М.: Мир, 1989. 190 с.
8. Singiresu, S.R., 2011. The Finite Element Method in Engineering. Elsevier UK, 726 p.
9. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ООО "ЦВВР", 2007. 116 с.
10. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров русская версия. СПб.: БВХ-Петербург, 2009. 512 с.

## References

1. Beskopyl'nyy A.N., Veremeenko A.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368)
-





2. Chmshkyan A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391)
3. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. Analiticheskie metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti [The analytical methods in contact problems of the theory of elasticity]. M.: Fizmatlit, 2004. 302 p.
4. Dzhonson K., Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya [Contact mechanics]. M.: Mir, 1989. 509 p.
5. Fischer-Cripps, A.C., 2007. Introduction to Contact Mechanics. Springer-Verlag US, 248 p.
6. Wriggers, P. and T.A. Laursen, 2008. Computational Contact Mechanics. Springer, 248 p.
7. Sabonnad'er Zh.K., Kulon Zh.L. Metod konechnykh elementov i SAPR: Per. s frants. [Finite Element Method and CAD: Trans. from France]. M.: Mir, 1989. 190 p.
8. Singiresu, S.R., 2011. The Finite Element Method in Engineering. Elsevier UK, 726 p.
9. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodeystviy [Introduction to contact mechanics]. Rostov-na-Donu: OOO "TsVVR", 2007. 116 p.
10. Ochkov V.F. Mathcad 14 dlya studentov i inzhenerov russkaya versiya [Mathsac 14 for students and engineers Russian version]. SPb.: BVKh-Peterburg, 2009. 512 p.