Оптимизация назначения средств доставки в транспортных задачах по критерию времени

Н.М. Нечитайло[1], В.Л. Панасов[2], Т.М. Линденбаум[2]

[1]Росссийский университет транспорта

[2] Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: В отличие от классической транспортной задачи по критерию минимума общего времени, предполагается обработка ресурсов как в исходных пунктах, так и в пунктах назначения, продолжительность которой линейно зависит от объёма обрабатываемой партии. При этом учитывается как наличие привлекаемых транспортных средств, так и их характеристики, например, грузоподъёмность. Для распределения ресурсов по имеющимся маршрутам обосновано применение венгерского метода. Для решения задачи распределения имеющихся транспортных средств по исходным пунктам с учётом грузоподъёмности транспортных средств предложено использовать метод динамического программирования. Рассмотрен иллюстративный пример и распределение средств доставки с применением команды «Поиск решения»» MS Excel.
Ключевые слова: транспортная задача, критерий минимума времени, затраты на обработку, грузоподъёмность.

В задачах по критерию минимума времени [1-3] не учитываются затраты на обработку ресурсов. В рассматриваемой же задаче предлагается поиск оптимального решения вести с учётом временных затрат на обработку (погрузку/разгрузку) ресурсов в пунктах хранения (исходных пунктах) и в пунктах выгрузки (назначения). При этом будем считать, что затраты времени на обработку ресурсов имеют линейную зависимость от количества ресурсов, направляемых по каждому из имеющихся маршрутов. При этом следует учитывать как наличие привлекаемых транспортных средств, так и их характеристики, например, грузоподъёмность. Рассматриваемая задача имеет сходство с классической линейной транспортной задачей [4], с задачами с минимаксной целевой функцией [5, 6] и с задачами с фиксированными доплатами [7-9], и её решение при линеаризации целевой функции приводит к существенным погрешностям, а поиск точного решения комбинаторными методами определяет неприемлемую (экспоненциальную) вычислительную эффективность. Минимаксный же характер показателя качества управления рассматриваемой задачи делает возможным решение общей задачи как совокупности подзадач о максимальном транспортном потоке [8, 10]. При этом, поскольку центральное место в предлагаемом алгоритме занимает метод последовательного сокращения невязок с полиномиальной вычислительной сложностью, вычислительная сложность предлагаемого алгоритма будет иметь ту же вычислительную сложность [8, 11, 12]. Отсюда следует вывод о применимости предлагаемого алгоритма в задачах с достаточно большим количеством переменных.

Пусть имеется m исходных пунктов с ресурсами a_i (i=1..m) и n пунктов назначения с потребностями b_j (j=1..n). Условием допустимости плана перевозок $\|x_{ij}\|$ (i=1..m, j=1..n) является выполнение обычных для линейной транспортной задачи ограничений:

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \ i = 1..m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ \ j = 1..n; \\ x_{ij} \ge 0, i = 1..m; j = 1..n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где

$\boldsymbol{a_i}$ – объём ресурса в $\boldsymbol{A_i}$;

$\boldsymbol{b_j}$ – потребности $\boldsymbol{B_j}$;

$\boldsymbol{x_{ij}}$ – количество единиц ресурса на маршруте $\boldsymbol{A_i} \rightarrow \boldsymbol{B_j}$. .

Решение будет оптимальным при достижении функцией $F(x_{ij})$ минимума

$$F(x_{ij}) = \max f(x_{ij}), \ i = 1..m, j = 1..n \qquad (2)$$

где

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + (t'_i + t''_j)x_{ij}, \ \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, \ \text{если } x_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$\boldsymbol{t_{ij}}$ – время движения из $\boldsymbol{A_i}$ в $\boldsymbol{B_j}$;

$\boldsymbol{t'_i}$ – потери на погрузку (обработку) единицы ресурса в $\boldsymbol{A_i}$;

$\boldsymbol{t''_j}$ – потери на разгрузку (обработку) единицы ресурса в $\boldsymbol{B_j}$.

В качестве предварительного шага нужно вычислить нижнюю границу целевой функции**.** Затем, используя найденное значение нижней границы $\boldsymbol{F_n}$, вычислить $\boldsymbol{d_{ij}}$ (i=1..m, j=1..n) и попытаться разместить отличные от нуля $\boldsymbol{x_{ij}}$ только по «разрешённым» маршрутам. Для решения предлагается использование метода Эгервари, так как в этом случае будет отсутствовать требование сбалансированности ресурсов и потребностей. Кроме того, венгерский метод некритичен к появлению вырожденности, от которой можно впоследствии избавиться на этапе анализа полученного оптимального решения.

В случае успешного размещения ненулевых перевозок по маршрутам, в которых F≤Fn (либо остаток ресурсов в исходных пунктах равен нулю, либо удовлетворены все потребности), оптимальное решение найдено. Если это не так, то необходимо минимально нарастить пропускные способности маршрутов за счёт увеличения (сколь угодно малого) значения нижней границы. После выполнения указанной процедуры следует пересчёт пропускных способностей и повторение процедуры наращивания потока в сети. В случае безуспешного размещения ненулевых перевозок по доступным маршрутам следует повторно нарастить пропускные способности маршрутов и пересчитать пропускные способности и так далее. Последовательность действий при расчёте Fn рассмотрим на примере. Сеть примера представлена на рис. 1, а матрица перевозок − в табл. 1. Над ребрами графа проставлены значения времён доставки ресурсов между пунктами. Этот же смысл имеют цифры в правых верхних углах ячеек табл. 1. Количество имеющихся ресурсов в пунктах A_i и величина потребностей пунктов B_j − цифры в центрах окружностей. Времена обработки единицы ресурса указаны как знаменатели.

Исходя из представленных выше ограничений (2, 3), следует расчёт $\boldsymbol{F_n}$:

$$F_n = max_i\{min_j[t_{ij} + min_j(a_i, b_j)(t'_i + t"_j)]\} \qquad (4)$$

В соответствии с (4) $\boldsymbol{F_n = t_{11}+b_1(t'_1+t''_1)}$ = 10,1.

Исходя из полученного значения, рассчитаем пропускные способности и проставим их в нижней части ячеек табл. 1.

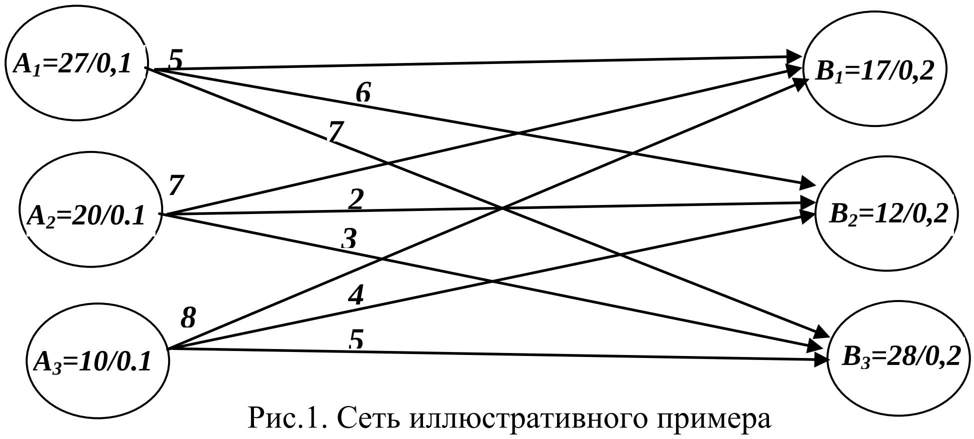

Рис.1. Сеть иллюстративного примера

Чтобы сократить заведомо бесперспективные шаги алгоритма, имеет смысл уточнить $\boldsymbol{F_n}$. Сокращение числа шагов может быть достигнуто путём вычисления пропускных способностей по правилу:

$$d_{ij} = \begin{cases} min_{i,j}\left[a_i, b_j, (F_n - t_{ij}) div\left(t'_i + t"_j\right)\right], \text{ если } t_{ij} \leq F_n; \\ 0, \text{ если } t_{ij} \leq F_n, \end{cases} \quad (5)$$

где ***div*** – операция целочисленного деления (с отбрасыванием остатка).

Возможность получения допустимого решения (удовлетворяющего всем ограничениям) обеспечивается справедливостью условий:

$$\left.\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i, i = 1..m; \\ \sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j, j = 1..n. \end{matrix}\right\} \quad (6)$$

Если не будет выполняться любое из неравенств (6), то следует вывод либо о невозможности вывоза ресурсов из какого-то исходного пункта, либо о невозможности доставки необходимого количества ресурсов до одного или нескольких пунктов назначения. В такой ситуации следует процедура наращивания нижней границы функции. Опираясь на уточнённое значение $\boldsymbol{F_n}$., вновь проводится расчёт пропускных способностей маршрутов в соответствии с (5) и снова проверяется справедливость условий (6).

Таблица 1. Пропускные способности маршрутов при $\boldsymbol{F_n}$=10,1

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	6	7

	17	12	9
a_2	7 10	2 12	3 10
a_3	8 7	4 10	5 10

Если установленные $\boldsymbol{d_{ij}}$ делают возможным вывоз ресурсов из всех исходных пунктов и доставку во все конечные пункты, то осуществляется переход к следующему этапу решения – составлению исходного плана перевозок, в котором значение $\boldsymbol{x_{ij}}$ рассчитывается по правилу:

$$x_{ij} = min_{ij}(a'_i, b'_j, d_{ij}) \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{a'_i}$, $\boldsymbol{b'_j}$ – ресурсы и потребности соответствующих исходных пунктов и пунктов назначения с учётом уже назначенных перевозок. План перевозок, полученный в соответствии с (7), представлен в табл. 2, где в верхней части ячеек содержатся времена движения из исходных пунктов в пункты назначения, а ниже – собственно значения $\boldsymbol{x_{ij}}$.

Полученный план является решением задачи. При ложности этого утверждения необходимо перейти к процедуре наращивания транспортного потока, наращиванию при необходимости $\boldsymbol{F_n}$ и так далее [3, 7, 8].

План транспортировки в табл. 2 ($F(x_{ij})$= 10,1) является оптимальным в предположении, что ресурсы, назначенные к перевозке по любому из рассматриваемых маршрутов, перевозятся за один рейс, то есть, что и количество транспортных средств в каждом исходном пункте и грузоподъёмность этих транспортных средств не ниже существующих потребностей. В этой связи определённый интерес представляет задача реализации ранее разработанного оптимального плана с учётом количества имеющихся в исходных пунктах транспортных средств и их грузоподъёмности.

Таблица 2. Исходный план примера

	b_1	b_2	b_3
a_1	5 17	6 10	7
a_2	7	2 2	3 18
a_3	8	4	5 10

В этом случае количество рейсов по каждому маршруту может быть рассчитано по формуле:

$$l_{ij} = \left(x_{ij} + q_i - 1\right) div\ q_i, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{q_i}$ – грузоподъёмность $\boldsymbol{i}$– го транспортного средства.

При этом время каждого маршрута рассчитывается по формуле:

$$F'(w_i) = \begin{cases} (l_{ij}t_{ij} + w_i - 1)/w_i + x_{ij}\left(t'_i + t"_j\right), & \text{если } l_{ij} \neq 0; \\ 0. & \text{если } l_{ij} = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

при ограничении $\sum_{i=1}^{m} w_i \leq W$,

где $\boldsymbol{w_i}$- количество транспортных средств в $\boldsymbol{i}$–м исходном пункте;

$\boldsymbol{W}$ – общее количество транспортных средств.

Таким образом, задача заключается в определении значений переменных $\boldsymbol{w_i}$, при которых:

$$F(w_i) = max_i F'(w_i) \rightarrow \min \ \ (i = 1..m). \qquad (10)$$

Ввиду характера целевой функции (10), вполне очевидно, что решение может быть найдено комбинаторными методами, например, методом динамического программирования. В тоже время следует обратить внимание, что в задачах практической размерности вполне применимы процедуры, заложенные в MS Excel.

В настоящее время при решении оптимизационных задач могут применяться либо программы на языках программирования высокого уровня, либо распространённые математические пакеты (например, MathCad), либо программы общего назначения (например, электронные таблицы).

Основная характеристика программ первого типа – разработчики подобных программ являются лицами, ориентированными прежде всего на разработку эффективных алгоритмов сформулированных задач. Такие программы имеют высокую вычислительную эффективность. При использовании таких программ математическая формулировка задачи не требуется, так как уже выполнена в ходе разработки алгоритма. Пользователю лишь требуется ввести исходные данные. При этом пользовательский интерфейс таких программ является не проработанным и понятным только узкому кругу специалистов.

Распространённые математические пакеты потребуют задачу формализовать, что требует определённого уровня математической подготовки пользователя. Кроме того, решение оптимизационных задач в таких пакетах может привести к решению ряда составляющих подзадач.

Программы общего назначения (например, электронные таблицы) обладают продуманным интерфейсом. Широкий спектр действия заложенных в них алгоритмов приводит к серьёзному ухудшению вычислительной эффективности.

В этой связи ниже рассмотрено использование MS Excel для решения сформулированной задачи. Более широкий круг оптимизационных задач, решаемых в среде MS Excel (основная задача линейного программирования, задача о ранце, задача о распределении ресурсов и др.), рассмотрен в [2].

На рис. 2 представлен найденный оптимальный план иллюстративного примера без учёта количества и характеристик имеющихся транспортных средств. Для реализации этого плана с учётом имеющихся транспортных средств и их характеристик, например, грузоподъёмности, предлагается в задачах малой размерности применить команду «ПОИСК РЕШЕНИЯ» MS Excel.

На рис. 3 представлено заполненное диалоговое окно команды «ПОИСК РЕШЕНИЯ», а на рис. 4 – результат её исполнения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	перевозки	17	10			0	0	0		
2			2	18		0	0	0		
3				10		0	0	0		
4										
5	время	5	6	7						
6		7	2	3						
7		8	4	5						
8										
9	грузоподъём	5		Общее число погрузч=			11			
10	к-во погрузчиков 1	6								
11	к-во погрузчиков 2	3		t'i=	0,1					
12	к-во погрузчиков 3	2		t''j=	0,2					
13										
14	рейсы 11	4	2	0						
15	рейсы 12	0	1	4						
16	рейсы 13	0	0	2						
17										
18	к-во w1j					сумма w1=	0			
19	к-во w2j					сумма w2=	0			
20	к-во w3j					сумма w3=	0			
21										
22	время маршрута = xij*(t'i+t''j)+рейсы 1i*t1i/w1 =	0	0	0		max=	0			
23	время маршрута =xij*(t'i+t''j)+рейсы 1i*t1i/w2 =	0	0	0		max=	0			
24	время маршрута =xij*(t'i+t''j)+рейсы 1i*t1i/w3 =	0	0	0		max=	0			
25	max=	0	0	0		max max =	0			
26										

=ЕСЛИ(B1=0;0;B18)

=ЦЕЛОЕ((B1+$B$9-1)/($B$9))

=ЕСЛИ(B18<>0;(B1*($E$11+$E$12));0)
+ЕСЛИ(B1*B18<>0;
ЦЕЛОЕ((B14+B18-1)/B18)*B5;0)2

Рис. 2. Оптимальный план без учёта количества и характеристик имеющихся транспортных средств

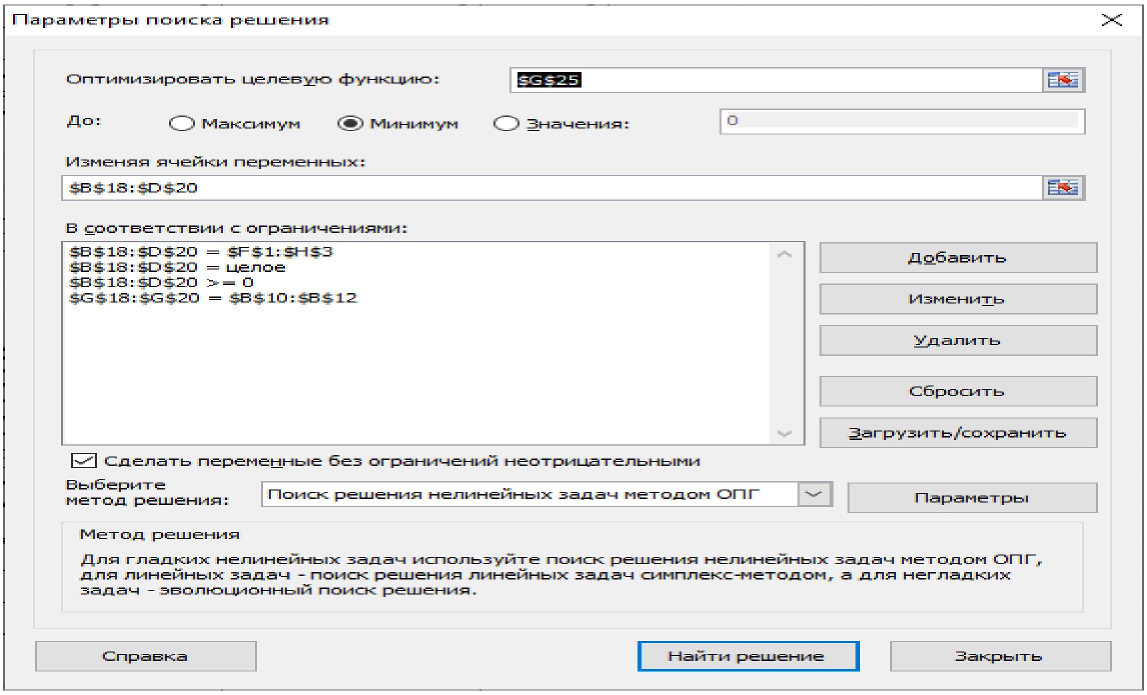

Рис. 3. Заполненное диалоговое окно

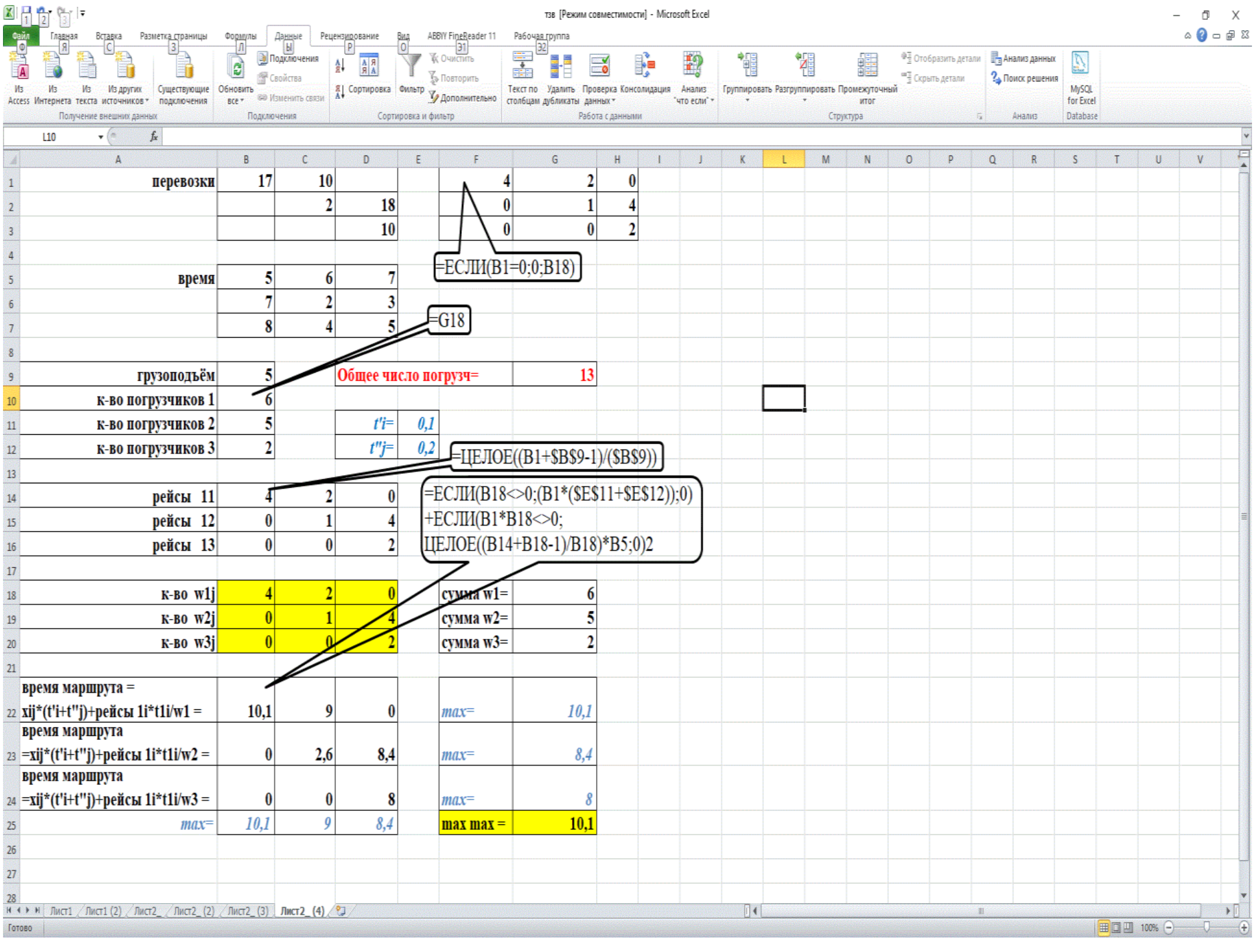

Рис. 4. Результат выполнения команды «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1988. – 552 с.
2. Золотухин В.Ф., Мартемьянов С.В., Нечитайло Н.М., Прокопец В.Н. Моделирование систем: учебное пособие // М.: МО РФ, РВИРВ. 2000. 164 с.
3. Нечитайло Н.М. Математические модели транспортного типа по критерию времени: монография // Рост. гос. ун-т путей сообщения. Ростов н/Д, 2007. – 146 с.: 23 ил.
4. Вентцель Е.С. Основы теории боевой эффективности и исследования операций // М.: Военная академия им. Жуковского Н.Е., 1961. 563 с.
5. Дроздов А.А., Миронюк В.П., Цыплаков В. Ю. Повышение эффективности системы двухэтапной транспортировки: на примере управления твердыми муниципальными отходами // Инженерный вестник Дона. - 2012. - №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/issue/107
6. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование // М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 382 с.
7. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. // М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 368 с.
8. Триус, Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа // М., 1967. 208 с.
9. Боженюк А.В., Герасименко Е.М. Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. - 2013. - №1. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583
10. Гольштейн, Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа // М.: «Наука», ГРФМЛ, 1969. 384 с.

11. Dantzig G.B. Application of the simplex method to a transportation problem. Activity analysis of production and allocation. ed T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York 1951. 373 p.
12. Hitchcock F.L Distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Phys., 1941, 20. 230 p.

References

1 Vasil'ev F.P. CHislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach. [Numerical methods for solving extreme problems]. M.: Nauka. GRFML, 1988. 552 p.
2 Zolotuhin V.F., Martem'janov S.V., Nechitaylo N.M., Prokopec V.N. Modelirovanie sistem: uchebnoe posobie [System Modeling: A Tutorial]. M.: MO RF, RVIRV. 2000. 164 p.
3 Nechitaylo, N.M. Matematicheskie modeli transportnogo tipa po kriteriyu vremeni: monografiya Rost. gos. un-t putej soobshhenija. [Mathematical models of transport type by the criterion of time: monograph]. Rostov n/D, 2007. 146 p.
4 Ventcel', E.S. M. Osnovy teorii boevoj effektivnosti i issledovaniya operacij [Fundamentals of Combat Effectiveness Theory and Operations Research]. Voennaja akademija im. Zhukovskogo N.E., 1961. 563 p.
5 Drozdov A.A., Mironjuk V.P., Cyplakov V. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/issue/107
6 Zuhovickij S.I., Avdeeva L.I. Linejnoe i vypukloe programmirovanie [Linear and Convex Programming]. M.: Nauka, GRFML, 1969. 382 p.
7 Korbut A.A., Finkel'shtejn Ju.Ju Diskretnoe programmirovanie [Discrete Programming] M.: Nauka, GRFML, 1969. 368 p.
8 Trius E.B. Zadachi matematicheskogo programmirovaniya transportnogo tipa [Transport-type mathematical programming problems]. M., 1967. 208 p.

9 Bozhenjuk A.V., Gerasimenko E.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №1. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583

10 Gol'shtejn E.G., Judin D.B. Zadachi linejnogo programmirovaniya transportnogo tipa [Transport-type linear programming problems M.: «Nauka», GRFML, 1969. 384 p.

11 Dantzig G.B. Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York 1951. 373 p.

12 Hitchcock F.L. J. Math. Phys., 1941, 20. 230 p.