

## Оптимизация геометрических параметров двухскатной балки прямоугольного сечения

А.А. Карамышева<sup>1</sup>, Б.М. Языев<sup>1</sup>, А.С. Чепурненко<sup>1</sup>, С.Б. Языева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный строительный университет

<sup>2</sup>Южный Федеральный университет

**Аннотация:** Решена задача оптимизации двухскатной балки из условия минимума потенциальной энергии деформации при постоянном объеме. Получено интегральное уравнение для определения оптимального угла наклона балки. Данное уравнение решалось численно методом половинного деления отрезка. Оптимальный угол наклона зависит от ширины сечения  $b$ , а также от объема балки. Установлено, что с ростом ширины сечения оптимальный угол наклона убывает.

**Ключевые слова:** оптимизация, двухскатная балка, потенциальная энергия деформации, переменная жесткость, минимальный объем, метод половинного деления отрезка.

Известно, что интегральной мерой, характеризующей способность системы сопротивляться внешним воздействиям, является потенциальная энергия деформации (ПЭД) [1,2]. ПЭД изгибаемой балки записывается в виде:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M(x))^2}{E(x)I(x)} dx. \quad (1)$$

Оптимальной является балка, которая при заданном объеме имеет минимум потенциальной энергии [1,2]. Минимизировать ПЭД можно, создав балку переменной жесткости, варьируя при этом модуль упругости материала, армирование, либо размеры поперечного сечения балки.

Оптимизация строительных конструкций путем изменения физико-механических характеристик материала рассматривается в статьях [3-7]. Решение задачи оптимизации путем варьирования коэффициента армирования приводится в работах [8-10]. В настоящей статье варьируется геометрия балки.

Рассматривается двухскатная балка прямоугольного сечения, шарнирно опертая по концам (рис. 1). На балку действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Ширина балки  $b$  постоянна по длине, а высота меняется по линейному закону:

$$h(x) = h_0 + xt \operatorname{tg} \alpha, 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (2)$$

Объем двухскатной балки определяется следующим образом:

$$V = \frac{bl}{2} \left( 2h_0 + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (3)$$

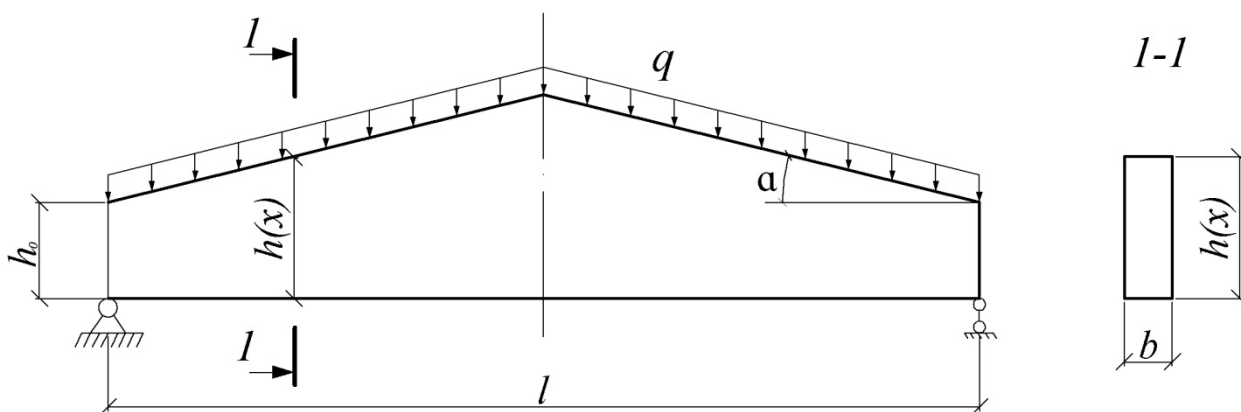


Рис. 1. – Расчетная схема

Выразим из (3) высоту на приопорных участках  $h_0$ :

$$h_0(\alpha) = \frac{V}{bl} - \frac{l}{4} \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Пусть  $t \operatorname{tg} \alpha = a$ . Найдем величину  $a$ , при которой потенциальная энергия деформации минимальна при заданных объеме балки  $V$  и ширине поперечного сечения  $b$ . ПЭД балки примет вид:

$$U = \frac{2}{E} \int_0^{l/2} \frac{(M(x))^2}{I(x)} dx = \frac{6q^2}{Eb} \int_0^{l/2} \frac{x^2(l-x)^2}{(h_0 + xt \operatorname{tg} \alpha)^3} dx = \frac{6q^2}{Eb} \int_0^{l/2} \frac{x^2(l-x)^2}{\left( \frac{V}{bl} - \frac{al}{4} + xa \right)^3} dx. \quad (5)$$

Условие минимума ПЭД записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{da} &= \frac{6q^2}{Eb} \int_0^{l/2} \frac{d}{da} \left( \frac{x^2(l-x)^2}{(V/(bl) + a(x-l/4))^3} \right) dx = \\ &= -\frac{18q^2}{Eb} \int_0^{l/2} \frac{x^2(l-x)^2}{(V/(bl) + a(x-l/4))^4} \left( x - \frac{l}{4} \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что оптимальный угол  $\alpha_{opt}$  зависит от ширины сечения и объема балки. Минимальный объем можно определить из условия прочности по нормальным напряжениям в наиболее опасном сечении. Так как балка имеет переменную по длине жесткость, то опасное сечение  $x = x_0$  находится не в середине пролета.

Найдем положение опасного сечения. Напряжения в крайних волокнах балки по абсолютной величине определяются следующим образом:

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)}, \quad (7)$$

где  $M(x) = \frac{qx}{2}(l-x)$ ,  $W(x) = \frac{b(h(x))^2}{6}$ .

Максимальное значение напряжения принимают в сечении, где производная  $\sigma'(x)$  обращается в нуль:

$$\sigma'(x) = \frac{M'(x)W(x) - M(x)W'(x)}{(W(x))^2} = \frac{\left(\frac{ql}{2} - qx\right) \frac{bh^2}{6} - \frac{qx}{2}(l-x) \frac{bh}{3} \operatorname{tg}\alpha}{(W(x))^2} = 0, \quad (8)$$

откуда  $x_0 = l \frac{h_0}{2h_{cp}}$ , где  $h_{cp} = h(l/2) = h_0 + \frac{l}{2} \operatorname{tg}\alpha$  – высота сечения в середине пролета.

Подставив в (7) найденную величину  $x_0$ , получим напряжение в опасном сечении:

$$\sigma(x_0) = \frac{3ql^2}{4bh_0(h_0 + l \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (9)$$

Приравнивая максимальное напряжение к расчетному сопротивлению  $R$ , получим квадратное уравнение относительно  $h_0$ :

$$h_0^2 + h_0 l \operatorname{tg} \alpha - \frac{3ql^2}{4bR} = 0. \quad (10)$$

Положительный корень уравнения (10) равен:

$$h_0 = -\frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{(l \operatorname{tg} \alpha)^2 + \frac{3ql^2}{bR}}. \quad (11)$$

Приравняв правые части (4) и (11), найдем  $V$ :

$$V = \frac{bl}{2} \sqrt{(l \operatorname{tg} \alpha)^2 + \frac{3ql^2}{bR}} - \frac{bl^2}{4} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12)$$

Уравнение (6) решалось численно методом половинного деления отрезка. Интеграл вычислялся при помощи метода трапеций. При расчете использовались следующие исходные данные: материал дерево,  $l = 12$  м,  $R = 12$  МПа,  $E = 10^4$  МПа,  $q = 40$  кН/м.

Результаты представлены на рис. 2. Закрашенная поверхность – график изменения угла  $\alpha$ , соответствующего минимуму ПЭД, в зависимости от  $b$  и  $V$ . При построении сетчатой поверхности на рис. 2 значения  $\alpha$  и  $b$  остались прежними, а значения объема балки заменены на вычисленные по формуле (12) из условия прочности. Пересечение двух поверхностей дает множество точек с координатами  $(b, V, \alpha)$ , в которых удовлетворяется одновременно условие прочности и минимума потенциальной энергии деформации.

На рис. 3 представлен график изменения  $\alpha_{opt}$  в зависимости от ширины сечения  $b$ . Из рис. 3 видно, что с увеличением ширины сечения оптимальный угол наклона уменьшается.

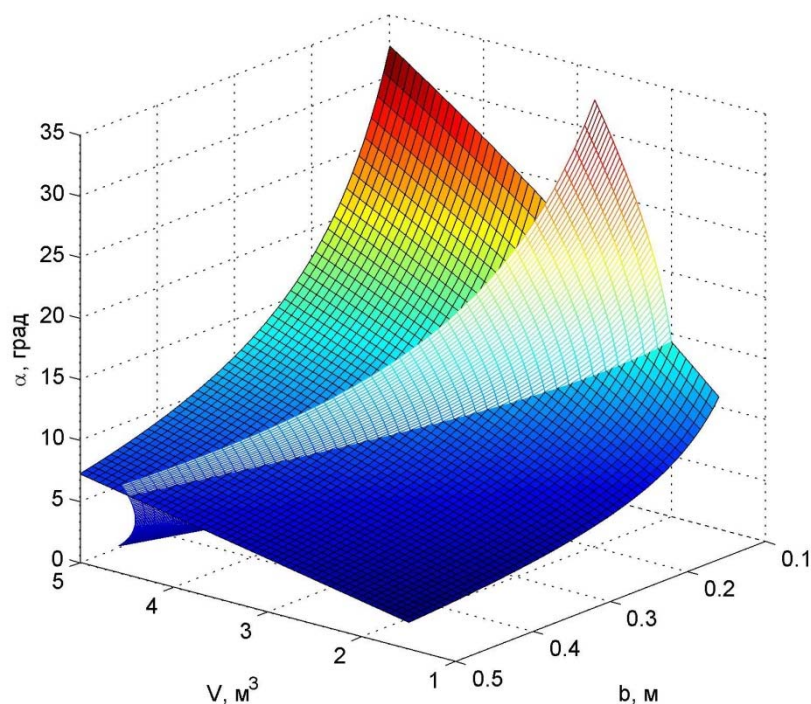


Рис. 2. – Изменение угла  $\alpha$  в зависимости от  $b$  и  $V$

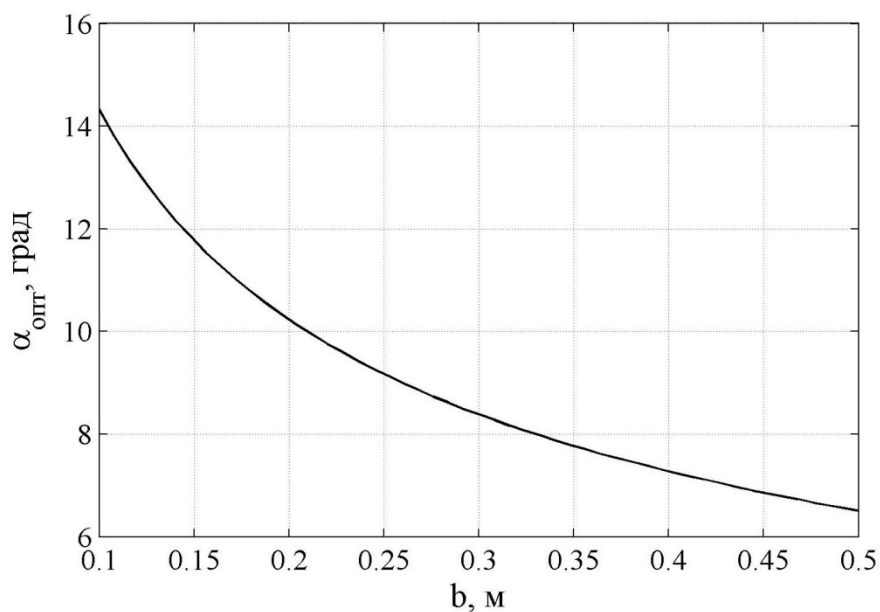


Рис. 3. – Зависимость оптимального угла  $\alpha$  от ширины сечения

На рис. 4 показан график изменения минимального объема балки, необходимого для обеспечения прочности по нормальным напряжениям в зависимости от ширины сечения. Представленный график показывает, что

минимальному объему соответствует минимальная ширина сечения, а с увеличением  $b$  расход материала возрастает.

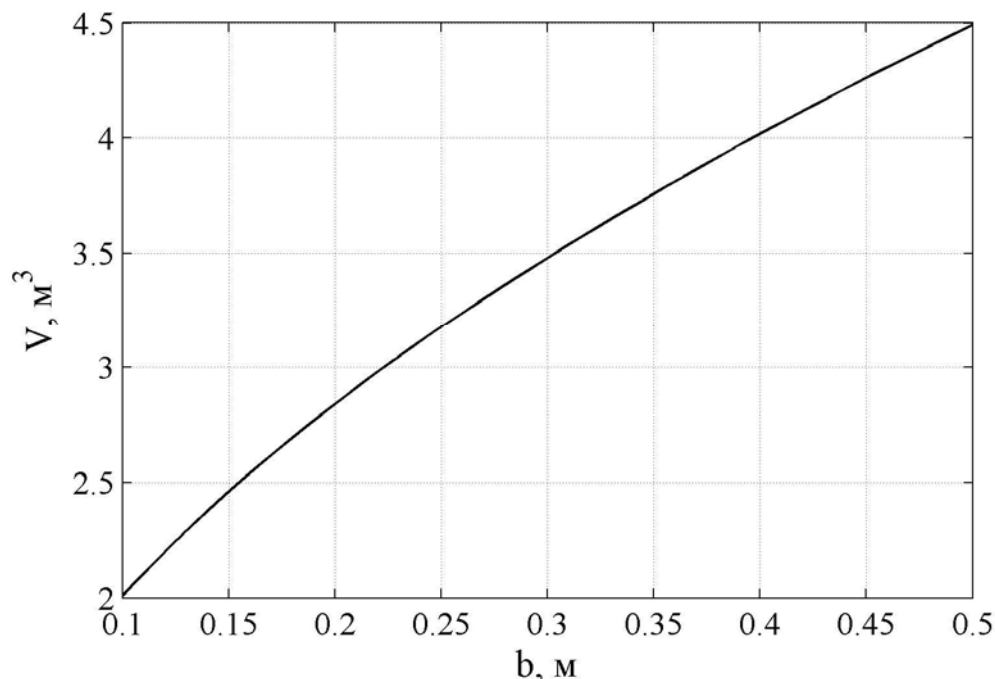


Рис. 4. – Зависимость объема оптимальной балки от ширины сечения

### Литература

1. Васильков Г.В. Теория адаптивной эволюции механических систем. Ростов н/Д: Terra-Принт, 2007. 248 с.
2. Васильков Г.В. Эволюционные задачи строительной механики: синергетическая парадигма. Ростов н/Д: ИнфоСервис, 2003. 179 с.
3. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Муханов А.В. Оптимизация толстостенной сферической оболочки на основе теории прочности Мора // Инженерный вестник Дона. 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890).
4. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyjev B.M. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion //Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland.

5. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе теории прочности Мора // Вестник МГСУ. 2013. №5. С.56-61.

6. Andreev V.I., Avershyev A.S. Nonstationary problem moisture elasticity for a nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder // WIT Transactions on the Built Environment. Fluid Structure Interaction VII. 2013. pp. 123-132.

7. Андреев В.И., Потехин И.А. О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел // Вестник Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. 2007. № 11. С. 48-52.

8. Языев Б. М., Чепурненко А. С., Муханов А. В. Оптимизация предварительно напряженного толстостенного железобетонного цилиндра // Наукоедение: электронный журнал. 2013. №5. URL: [naukovedenie.ru/PDF/45trgsu513.pdf](http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu513.pdf).

9. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Муханов А.В. Оптимизация толстостенной железобетонной оболочки на основе решения обратной задачи механики неоднородных тел // Инженерный вестник Дона. 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1891](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1891)

10. Муханов В.В., Языев Б.М., Муханов А.В., Чепурненко А.С., Языев С.Б.. Оптимизация строительных конструкций на основе численного и аналитического решения задач механики неоднородных тел. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. 83 с.

### References

1. Vasil'kov G.V. Teoriya adaptivnoy evolyutsii mekhanicheskikh system [The theory of adaptive evolution of mechanical systems]. Rostov n/D: Terra-Print, 2007. 248 p.



2. Vasil'kov G.V. Evolyutsionnye zadachi stroitel'noy mekhaniki: sinergeticheskaya paradigma [Evolutional problems of structural mechanics: synergetic paradigm]. Rostov n/D: InfoServis, 2003. 179 p.
3. Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Mukhanov A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890).
4. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyev B.M. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion. Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland.
5. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Yazyev B.M. Vestnik MGSU. 2013. №5. pp.56-61.
6. Andreev V.I., Avershyev A.S. Nonstationary problem moisture elasticity for a nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder. WIT Transactions on the Built Environment. Fluid Structure Interaction VII. 2013. pp. 123-132.
7. Andreev V.I., Potekhin I.A. Vestnik Otdeleniya stroitel'nykh nauk Rossiyskoy akademii arkhitektury i stroitel'nykh nauk. 2007. № 11. pp. 48-52.
8. Jazyev B. M., Chepurnenko A. S., Muhanov A. V. Naukovedenie: jelektronnyj zhurnal. 2013. №5. URL: [naukovedenie.ru/PDF/45trgsu513.pdf](http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu513.pdf).
9. Jazyev B.M., Chepurnenko A.S., Muhanov A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1891](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1891)
10. Muhanov V.V., Jazyev B.M., Muhanov A.V., Chepurnenko A.S., Jazyev S.B. Rostov-na-Donu: Rost. gos. stroit. un-t, 2014. 83 p.