

## Организация передачи данных по сети связи с учётом абонентской платы за использование каналов

*Н.М. Нечитайло<sup>1</sup>, В.Л. Панасов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Российский университет транспорта*

<sup>2</sup>*Ростовский государственный университет путей сообщения*

**Аннотация:** Рассматривается задача планирования отправки сообщений известных объёмов из исходных пунктов в пункты назначения с известными потребностями. При этом предполагается, что затраты на передачу информации с одной стороны пропорциональны передаваемым объёмам и стоимости передачи единицы информации по выбранным каналам связи, а с другой стороны связаны с фиксированной абонентской платой за использование каналов, не зависящей от объёма передаваемой информации. Показателем качества плана при такой постановке являются суммарные затраты на отправку всего запланированного объёма сообщений. Проведена сравнительная характеристика эффективности методов получения оптимальных планов с помощью линейаризованной целевой функции и точного решения одним из комбинаторных методов. **Ключевые слова:** передача сообщений, транспортная задача, критерий минимума суммарных затрат, вычислительная сложность алгоритма, линейаризация целевой функции.

Рассматривается задача планирования отправки сообщений из  $m$  пунктов  $A_i$  ( $i=1..m$ ) объёмом  $a_i$  ( $i=1..m$ ) в  $n$  пунктов назначения  $B_j$  ( $j=1..n$ ) с потребностями  $b_j$  ( $j=1..n$ ). При этом предполагается, что затраты на передачу информации, с одной стороны, пропорциональны передаваемым объёмам и стоимости передачи единицы информации по выбранным каналам связи, а с другой стороны, связаны с фиксированной абонентской платой за использование каналов, не зависящей от объёма передаваемой информации. Показателем качества плана при такой постановке являются суммарные затраты на отправку всего запланированного объёма сообщений [1]. Сформулированная задача в общем виде соответствует постановке транспортной задаче с фиксированными затратами с типовыми для задач транспортного типа ограничениями [2 – 4].

Минимизируемая функция суммарных затрат:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_{ij}) \quad (1)$$

$$\text{где } f_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}(x_{ij}) + d_{ij}, & x_{ij} > 0, \\ 0, & x_{ij} = 0 \end{cases}$$

$c_{ij}$  – стоимость передачи единицы информации по каналу  $A_i \rightarrow B_j$ ;

$x_{ij}$  – объем передаваемой информации (например, Гб) по каналу  $A_i \rightarrow B_j$ ;

$d_{ij}$  – абонентская плата за использование канала  $A_i \rightarrow B_j$ .

Вполне очевидно, что при соизмеримых величинах стоимости передачи единицы информации по выбранным каналам связи и величиной абонентской платы за использование каналов условное оптимальное управление (с заниженным значением целевой функции) может быть найдено за счёт линеаризации исходной целевой функции [5, 6]. Упрощение исходной задачи достигается за счёт перехода от исходной функции (1) к задаче с линейным характером составляющих коэффициентов

$$F'(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}}) x_{ij}, \quad (2)$$

$$\text{где } M_{ij} = \min_{ij}(a_i, b_j).$$

В случае же существенного дисбаланса между стоимостью передачи единицы информации по каналам связи и абонентской платой за использование этих каналов отличие решения задачи (2) от оптимального решения возрастает и в предельных случаях ( $\forall c_{ij} = 0$ ) может достигать 25 % [3, 4, 7]. При смешанном характере коэффициентов ( $\exists c_{ij} > 0, \exists d_{ij} > 0$ ) как правило будет находиться в пределах 7-20 % [7, 8].

Решение задачи (2) может применяться ввиду дефицита временных ресурсов [5, 6]. Ещё одна причина применимости такого подхода – относительная простота расчётов, что делает его приемлемым в качестве многократно повторяемой процедуры определения нижней границы функции (1) при реализации алгоритмов поиска точного решения.

Задача (1) аппроксимирована обычной транспортной задачей, решение которой известными методами, например, методом потенциалов, не представляет трудностей. В качестве иллюстрации, в табл. 1 представлен результат решения задачи ( $F'(x_{ij})=15,9$ ) с целевой функцией (2). В примере имеется 3 исходных пункта с известными объемами информации подлежащей передаче ( $a_1=27, a_2=20, a_3=10$ ) и 3 конечных пункта, в которые сообщения пересылаются в заданных объемах ( $b_1=17, b_2=12, b_3=28$ ).

Таблица № 1

Оптимальный план задачи (2)

	$b_1=17$	$b_2=12$	$b_3=28$	
$a_1=27$	$\frac{7}{17}$ <b>9</b>	$\frac{5}{12}$ <b>0,074</b>	$\frac{8}{27}$ <b>18</b>	$U_1=0$
$a_2=20$	$\frac{4}{17}$ <b>8</b>	$\frac{2}{12}$ <b>12</b>	$\frac{5}{20}$ <b>0,13</b>	$U_2=-0,176$
$a_3=10$	$\frac{5}{10}$ <b>0,076</b>	$\frac{4}{10}$ <b>0,053</b>	$\frac{3}{10}$ <b>10</b>	$U_3=0,004$
	$V_1=0,42$	$V_2=0,343$	$V_3=0,296$	

Рассчитанные значения  $d_{ij}/M_{ij}$  функции (2) располагаются справа сверху ячеек табл. 1. Объемы информации, передаваемой по каналам, представлены в центрах ячеек таблицы. Найденные в соответствии с применённым методом потенциалов значения ( $U_i$ ) ( $V_j$ ) (потенциалы строк и столбцов) оптимального плана расположены в нижней строке и правом столбце таблицы. Рассчитанные коэффициенты при свободных переменных расположены в левых нижних углах ячеек. Так как коэффициенты при свободных переменных не отрицательны, то достигнуто оптимальное решение. Однако,

показатель качества плана по формуле (2) является заниженным по отношению к реальной задаче (где не выполняется равенство  $x_{ij}$  и  $M_{ij}$ ). Для получения значения реальных затрат следует пересчитать показатель качества полученного плана в соответствии с (1). Расчёты показывают, что суммарные затраты на реализацию полученного плана задачи (2) составят 24 ед.

В предельном случае, когда затраты на передачу единицы информации по любому из рассматриваемых каналов пренебрежимо малы (либо вообще отсутствуют), решение исходной задачи (1) сводится к задаче минимизации функции:

$$\Phi(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}) \quad (3)$$

где  $f(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0. \end{cases}$

Разработка алгоритма вызвана необходимостью в ряде случаев получать точные решения, например, когда лицо, принимающее решение (ЛПР), имеет достаточный запас времени для выработки решения. Потребность в точном решении может возникнуть и в случаях, когда успешное выполнение операции возможно лишь при реализации оптимального плана распределения информационных потоков, а фактор времени реализации плана имеет второстепенное значение.

К сожалению, к настоящему времени удалось получить точное решение рассматриваемой задачи лишь на основе комбинаторных методов, имеющих экспоненциальную зависимость числа шагов алгоритма от числа переменных [4, 8]. Предлагается свести решение сформулированной задачи к решению конечной последовательности задач линейного программирования методом

---

ветвей и границ. Применение метода динамического программирования в решении сформулированной задачи нецелесообразно ввиду его эквивалентности в условиях этой задачи методу полного перебора вариантов [4, 9].

Для получения оптимального решения предлагается, приняв известные меры, предотвращающие получение вырожденных решений, на первом шаге получить приближенное решение методом линеаризации целевой функции. Значение целевой функции полученного решения на этом шаге рассматривается в качестве нижней границы целевой функции  $W_0$ . Затем строится дихотомическое дерево решений. Начальная вершина этого дерева представляет собой множество всех допустимых решений задачи. На следующем шаге указанное множество разбивается на два подмножества:

- 1) подмножество допустимых решений, в каждом из которых рассматриваемая переменная матрицы перевозок, например, переменная  $x_{II}$  является базисной (большей нуля);
- 2) подмножество допустимых решений, в каждом из которых эта переменная  $x_{II}$  матрицы перевозок является свободной (равной нулю).

То есть вводится запрет на использование маршрута  $A_I \rightarrow B_I$ .

Для каждого из этих подмножеств вычисляются суммарные затраты построенной части решения (для первого подмножества они равны  $C_{II}$ , а для второго подмножества – нулю) плюс оценка снизу суммарных затрат недостроенной части решения. Принято следующее правило выбора очередного шага процедуры разбиения текущих подмножеств на подмножества более низкого уровня: очередной шаг процедуры выполняется из вершины, соответствующей подмножеству решений с наименьшей суммой суммарных затрат построенной части решения и оценки снизу суммарных затрат недостроенной части решения. В результате выбранное

---

подмножество (например, подмножество 2) разбивается на два подмножества более низкого уровня:

- 21) подмножество допустимых решений, в каждом из которых следующая рассматриваемая переменная, например, переменная  $x_{12}$ , является базисной;
- 22) подмножество допустимых решений, в каждом из которых эта же переменная является свободной.

Для каждого из полученных подмножеств также вычисляются суммарные затраты построенной части решения (для первого подмножества второго уровня они равны  $0+c_{12}$ , а для второго подмножества – нулю) плюс оценка снизу суммарных затрат недостроенной части решения и, в зависимости от результата, выбирается очередной шаг процедуры. Далее разбиение на более мелкие подмножества осуществляется аналогично указанному выше. Этот процесс заканчивается выбором одного из решений:

- ...1) – решение, входящее во все выбранные ранее подмножества, в котором последняя из рассматриваемых переменных, например, переменная  $x_{mn}$ , является базисной;
- ...2) – решение, входящее во все выбранные ранее подмножества, в котором последняя из рассматриваемых переменных, например, переменная  $x_{mn}$ , является свободной.

Необходимо отметить, что на некоторых шагах одно из рассматриваемых подмножеств допустимых решений может оказаться пустым. Наличие пустых подмножеств позволяет существенно сократить поиск оптимальных решений задачи. Процедура получения вывода о том, является ли рассматриваемое подмножество допустимых решений пустым, будет рассмотрена ниже.

---

Суммарное время перевозок полученного решения (...1 или ...2) затем сравнивается с нижней границей целевой функции  $W_0$ , и, если они совпали, то вычисления на этом прекращаются, так как найдено оптимальное решение задачи. В противном случае лучшее из найденных решений запоминается, а значение целевой функции выбранного решения считается текущим рекордом. Далее продолжается поиск оптимального решения путём перехода к висячим вершинам дерева решений. Отказ от разбиения текущего подмножества на подмножества низшего уровня для получения очередного решения (отбраковка неперспективных подмножеств) производится, если суммарные затраты построенной и недостроенной частей решения рассматриваемого подмножества окажутся не меньше текущего рекорда. В случае получения решения лучшего, чем текущий рекорд, это лучшее решение запоминается и обновляется значение рекорда. Таким образом, поиск оптимального решения прекращается либо в случае обнаружения решения со значением целевой функции, равным  $W_0$ , либо по окончании рассмотрения всех перспективных подмножеств решений (или обновление рекорда при обнаружении лучшего подмножества, или выбраковка подмножества как неперспективного).

В общем виде алгоритм представлен на рис. 1. В блоке 1 осуществляется: ввод исходных данных; проверка сбалансированности задачи и сведение её к таковой известными методами; принятие мер, исключающих получение вырожденного решения. В блоке 3 счётчику шагов  $H$  присваивается начальное (нулевое) значение. В блоке 4 осуществляется переход от начальной вершины дерева решений к первому и последующим шагам процедуры построения дихотомического дерева решений. В блоке 5 проверяется, закончена ли процедура разбивки на подмножества. В блоках 6–14 вычисляется сумма затрат построенной части решения и оценки снизу суммарных затрат недостроенной части решения при условии, что на

---

текущем шаге процедуры выбрано подмножество допустимых решений, в каждом из которых рассматриваемая переменная матрицы перевозок является базисной. В блоках 15, 16 вычисляется сумма затрат построенной части решения и оценки снизу суммарных затрат недостроенной части решения при условии, что на текущем шаге процедуры выбрано подмножество допустимых решений, в каждом из которых рассматриваемая переменная матрицы перевозок является свободной. В блоке 7 задаются условные стоимости использования маршрутов  $c'_{ij}$  по правилу:

- $c'_{ij} = 0$ , если переменная  $x_{ij}$  построенной части решения базисная;
- $c'_{ij} = c_{ij}$ , если переменная  $x_{ij}$  построенной части решения свободная.

В этом же блоке строится начальное допустимое базисное решение по правилу «самые дешёвые маршруты используются в первую очередь». В блоке 8 вычисляются значения вспомогательной функции:

$$\Phi'' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

В случае истинности условия, проверяемого в блоке 9, делается вывод о том, что перевозки, которые должны быть свободными в построенной части решения, действительно таковыми являются. В этом случае происходит переход к блоку 10, где вычисляется общее время перевозок построенной части решения. При невыполнении этого условия ( $\Phi''=0$ ) осуществляется переход к блокам 11–14, 8, 9, где решение улучшается (если это возможно) и в итоге достигается решение, удовлетворяющее условию блока 9. В блоке 11 вычисляются симплекс-множители, коэффициенты при нулевых перевозках, и минимальный из этих коэффициентов присваивается переменной  $Z$ . В блоке 12 проверяется условие неотрицательности  $Z$ . Выполнение условия означает, что полученное решение с выбранными обязательными базисными и свободными и переменными улучшить



невозможно, то есть допустимого решения, удовлетворяющего условию блока 9, не существует. В этом случае в блоке 13 суммарным затратам рассматриваемого решения присваивается максимально возможное значение суммарных затрат, обозначенное в блок-схеме символом  $T$ . При отрицательном значении переменной  $Z$  управление передаётся блоку 14, где производится построение цикла, определение величины перераспределения и собственно перераспределение перевозок, и далее следует переход к блоку 9. Блок 16 объединяет в себе блоки 7–14 и назван процедурой «Поток». В блоке 17 определяется подмножество с меньшими суммарными затратами. Найденное подмножество становится на этом этапе построенной части решения базовым (метка  $MT(M-H+1) = 1$ , если в подмножестве с меньшими суммарными затратами рассматриваемая переменная является базисной; метка  $MT(M-H+1) = 0$ , если – свободной). Далее следует переход к блоку 4. По окончании процедуры разбиения всего множества допустимых решений на указанные подмножества и получения в результате одного из возможных решений (...1 или ...2) в блоках 20–22, в зависимости от результата выполнения блока 17 на шаге  $H-1$ , переменной  $R_1$  присваивается соответствующее значение суммарных затрат. Поскольку полученное решение является на этом шаге алгоритма пока единственным, то в блоке 23 переменной  $R_0$  («рекорду») присваивается значение переменной  $R_1$ . В блоке 24 (процедура «Поиск») полученный «рекорд» сравнивается с нижней границей целевой функции, и, если они совпали, вычисления прекращаются, поскольку оптимальное решение задачи найдено. В противном случае, продолжается поиск оптимального решения путём перехода к висячим вершинам дерева решений.

Вычислительная эффективность алгоритма может быть улучшена более точным методом определения нижней границы целевой функции [5, 7].

---

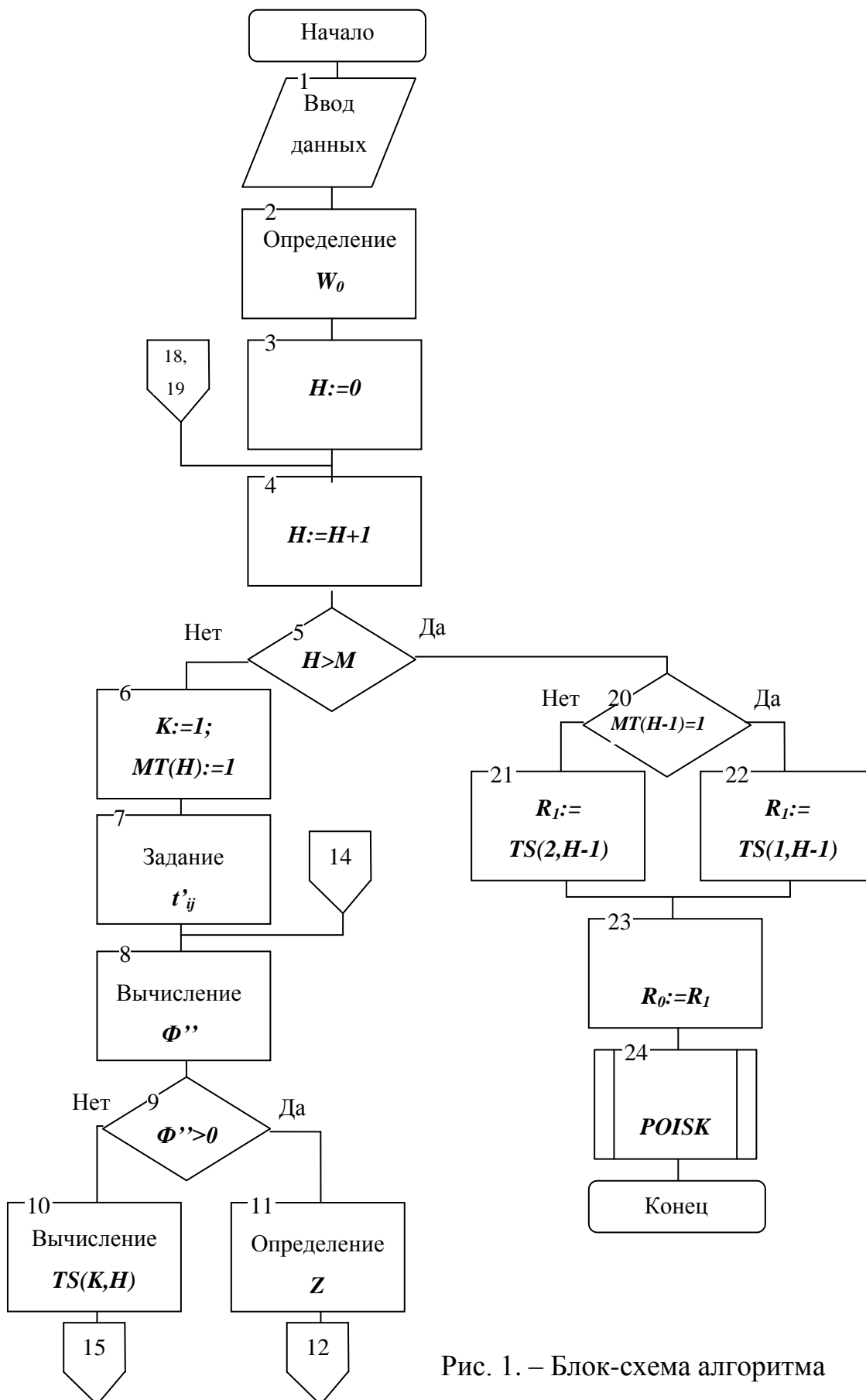


Рис. 1. – Блок-схема алгоритма

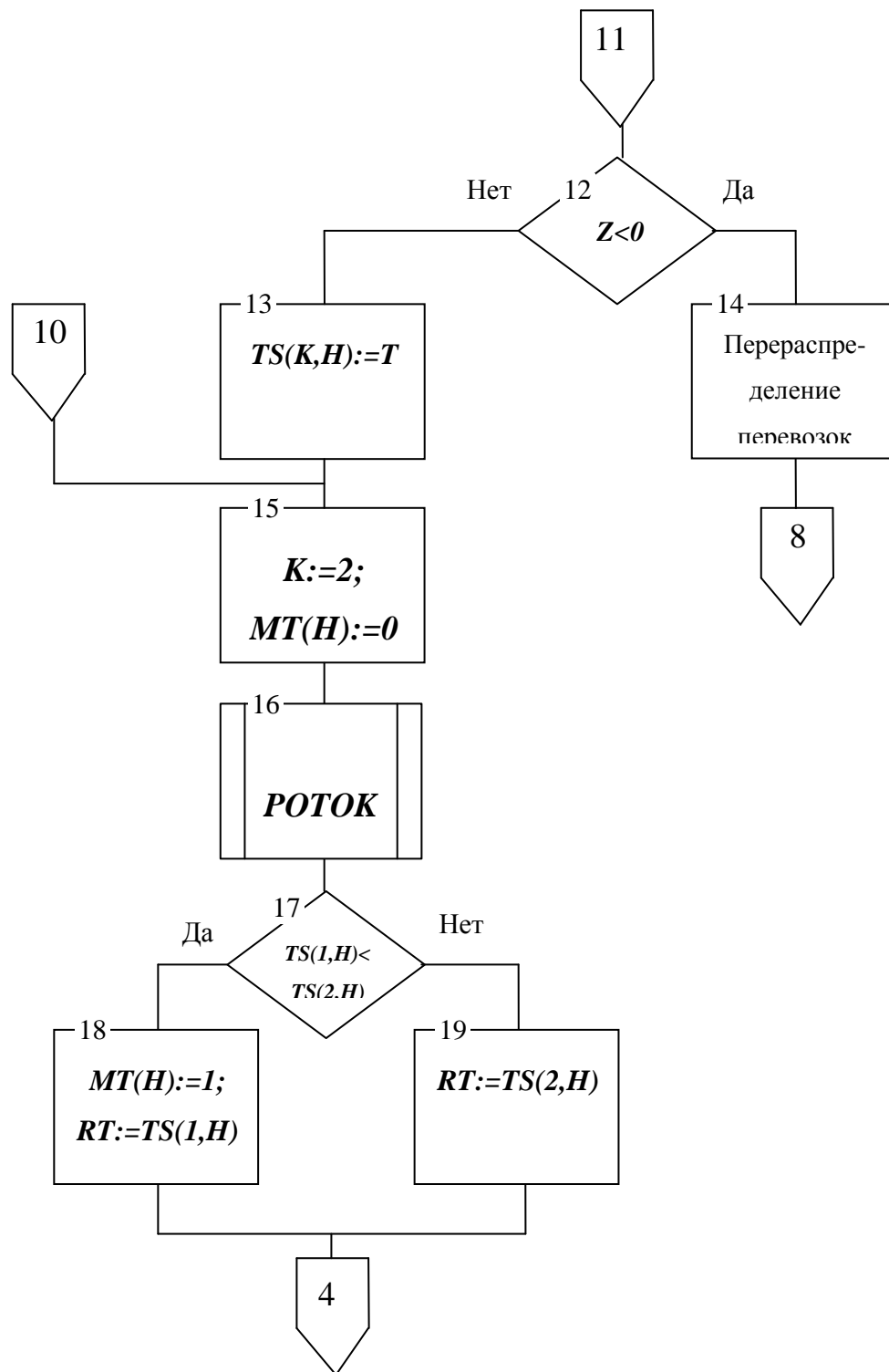


Рис. 2 – Блок-схема алгоритма (окончание)

Кроме того, метод ветвей и границ позволяет установить приемлемое для ЛПР отклонение целевой функции анализируемых решений от достижимой, в ряде случаев лишь теоретически, нижней границы целевой функции (например, в процентах), и существенно сократить время поиска приемлемого решения [3, 4].

Оптимальное решение иллюстративного примера, найденное с помощью метода ветвей и границ, представлено в табл. 2.

Таблица № 2

Оптимальный план задачи (1)

	$b_1=17$	$b_2=12$	$b_3=28$
$a_1=27$	7	5	8
$a_2=20$	4	2	5
$a_3=10$	5	4	3

	<b>7</b>	<b>3</b>	<b>27</b>
<b>17</b>		<b>3</b>	
		<b>9</b>	<b>1</b>

При этом суммарное время перевозок составляет 21 ед., что на 12,5 % лучше решения задачи (2).

В заключение необходимо отметить, что при близости значений фиксированных доплат на большинстве планируемых к применению каналов связи применяемый метод ветвей и границ приводит практически к полному перебору вариантов решений [1, 3, 10]. Важно также и то, что выигрыш при этих условиях от реализации оптимального решения по сравнению с любым решением, удовлетворяющим начальным условиям, минимален [11, 12].

### Литература

1. Нечитайло Н.М. Математические модели транспортного типа по критерию времени: монография // Рост. гос. ун-т путей сообщения. Ростов н/Д, 2007. – 146 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1988. – 552 с.
3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование // М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 368 с.
4. Триус, Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа // М., 1967. – 208 с.
5. Дроздов А.А., Миронюк В.П., Цыплаков В. Ю. Повышение эффективности системы двухэтапной транспортировки: на примере управления твердыми муниципальными отходами // Инженерный вестник Дона. - 2012. - №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/issue/107](http://ivdon.ru/ru/magazine/issue/107)
6. Целигоров, Н.А., Целигорова, Е.Н., Мафура, Г.В. Математические модели неопределенностей систем управления и методы, используемые для их исследования // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340](http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340)
7. Баклагин В.Н., Реализация распараллеливания алгоритмических структур, моделирующих экосистему озерных объектов, на многоядерные процессоры // Инженерный вестник Дона. - 2013. - № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1750](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1750)
8. Боженюк А.В., Герасименко Е.М., Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. - 2013. - № 1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583)

9. Коварцев, А.Н., Даниленко А.Н. Алгоритмы и анализ сложности: учебник. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. – 128 с.
10. Gottlieb, Allan; Almasi, George S. Highly parallel computing. Redwood City, Calif.: Benjamin/Cummings, 1989 – p. 256.
11. Rabaey, Jan M. Digital integrated circuits: a design perspective. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1996 – p. 235.
12. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. — СПб: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.

### References

1. Nechitaylo, N.M. Matematicheskie modeli transportnogo tipa po kriteriju vremeni: monografija [Mathematical models of transport type by the criterion of time: monograph]. Rost. gos. un-t putej soobshhenija. Rostov n/D, 2007. 146 p.
  2. Vasil'ev F.P. Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach [Numerical methods for solving extreme problems]. M.: Nauka. GRFML, 1988. 552 p.
  3. Korbut A.A., Finkel'shtejn Ju.Ju Diskretnoe programmirovaniye [Discrete programming] M.: Nauka, GRFML, 1969. 368 p.
  4. Trius E.B. Zadachi matematicheskogo programmirovaniya transportnogo tipa [Problems of mathematical programming of transport type] M., 1967. 208 p.
  5. Drozdov A.A., Mironjuk V.P., Cyplakov V. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/issue/107](http://ivdon.ru/ru/magazine/issue/107)
  6. Celigorov, N.A., Celigorova, E.N., Mafura, G.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. № 4. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340](http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340)
  7. Baklagin V.N., Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1750](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1750)
-



8. Bozhenjuk A.V., Gerasimenko E.M., Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. № 1.  
URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583)
9. Kovartsev, A.N. Algoritmy i analiz slozhnosti: uchebnik [Algorithms and Complexity analysis: textbook]. Samara: Izd-vo Samarskogo universiteta, 2018. 128 p.
10. Gottlieb, Allan; Almasi, George S. Highly parallel computing. Redwood City, Calif.: Benjamin/Cummings, 1989. 256 p.
11. Rabaey, Jan M. Digital integrated circuits: a design perspective. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1996. 235 p.
12. Voevodin V.V., Voevodin V.I.V. Parallel'nye vychislenija [Parallel computing] SPb: BXV- Peterburg, 2002. 608 p.