Инженерный вестник Дона, №2 ч.2 (2015)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884

Конструирование поверхностей на базе плоской шестиугольной 3-ткани

Ю.М. Бельченко, Н.М. Шумун

Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: Статья посвящена конструированию поверхностей на основе плоских 3-тканей. Плоской 3-тканью называются такие семейства 3-линий, которые перекрывают некоторую область плоскости так, что через каждую точку этой плоскости проходит 3 линии разных семейств. Функциональные определители этой 3-ткани нигде в области не обращается в нуль, две кривые различных семейств не имеют более одной общей точки. 3-ткань, используемая в нашем случае, является шестиугольной, т.е. состоящей из семейств параллельных прямых. Каждая линия 3-х семейств несет на себе информацию о параметрах линий моделируемой поверхности. На основе информации, которую несет на себе каждая прямая трех семейств, моделируется некоторая поверхность.
Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерная графика, моделирование поверхностей, шестиугольные 3-ткани.

В этой работе предлагается новый способ конструирования поверхностей на основе плоской 3-ткани, когда каждое семейство линий несет на себе некоторую информацию, определяющую параметры конструируемой поверхности.

Пусть в координатной плоскости *XOY* пространства задано семейство параллельных прямых. Будем считать, что каждая прямая семейства является проекцией некоторой кривой принадлежащей поверхности *Ф*. Пусть также для упрощения дальнейших выкладок прямые этого семейства параллельны координатной оси *OX*. Тогда уравнение такого семейства имеет вид:

$$y = i \quad , \tag{1}$$

где $i = 1,2,3...n$

Поставим каждой точке прямых этого семейства в соответствие некоторое значение аппликаты *z*. При этом значение аппликат может быть либо дискретным, либо непрерывным вдоль прямых семейства. Во втором случае необходимо задать начальные значения аппликат в точках $M_i^н$, а также зависимости аппликат от положения текущей точки на прямой семейства (например, линейный, квадратичный, кубический и т.д.). Уравнения таких зависимостей запишем в виде:

$$z_i = f_1(x)\,. \qquad (2)$$

Введем на плоскости *XOY* еще одно семейство прямых параллельных теперь координатной оси *OY* и будем полагать, что каждая прямая такого семейства является проекцией некоторой линии, принадлежащей конструируемой поверхности *Ф*. Уравнение второго семейства прямых запишется в виде:

$$x = j\,, \qquad (3)$$

где $j = 1,2,3...n$.

Очевидно, что значения аппликат z_{ij} произвольной точки M_{ij} поверхности *Ф* равны значениям аппликат уравнения (2) - z_i. При этом изменение значений аппликат вдоль прямых второго семейства может быть, как и в первом случае, дискретным и непрерывным. Характер зависимости значений аппликат устанавливается в следующем виде:

$$z_i = f_2(y)\,. \qquad (4)$$

Очевидно, что из уравнений (2) и (4) можно определить поведение касательных z_i' и z_j' вдоль направлений параллельных осям *OX* и *OY* соответственно. Таким образом, можно утверждать, что прямые 1-го и 2-го семейств несут на себе информацию не только о величинах аппликат, но и о поведении касательных вдоль ортогональных направлений.

Далее введем третье семейство диагональных параллельных прямых, уравнение которых запишется в виде:

$$y_{ij} = x_{ij} \qquad (5)$$

где $i = 1,2,3...n$, $j = 1,2,3...n$.

Каждая прямая 3-го семейства является проекцией некоторой кривой принадлежащей моделируемой поверхности *Ф*. Уравнения кривых можно записать в виде:

$$z_{ij} = f_3\left(x_{ij}, y_{ij}\right). \qquad (6)$$

В узлах такой 3-сети поверхность *Ф* значения z_i, z_j, z_{ij} должны быть равными, т.к. они принадлежат поверхности *Ф*.

Такая сеть будет являться шестиугольной 3-тканью.

Тогда уравнение сети поверхности *Ф* будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} z_i &= f_1\left(x\right), y = i \\ z_j &= f_2\left(y\right), x = j \\ z_{ij} &= f_3\left(x_{ij}, y_{ij}\right), x_{ij} = y_{ij} \end{aligned}\right\}$$

(7)

где $i = 1,2,3...n$, $j = 1,2,3...n$.

Вид отсека поверхности *Ф* при непрерывных значениях z_i и z_j показан на рис. 1. Если изменения значений z_i и z_j дискретно вдоль линий семейств, то мы получаем треугольную сеть в пространстве. треугольную сеть в пространстве показана на рис. 2.

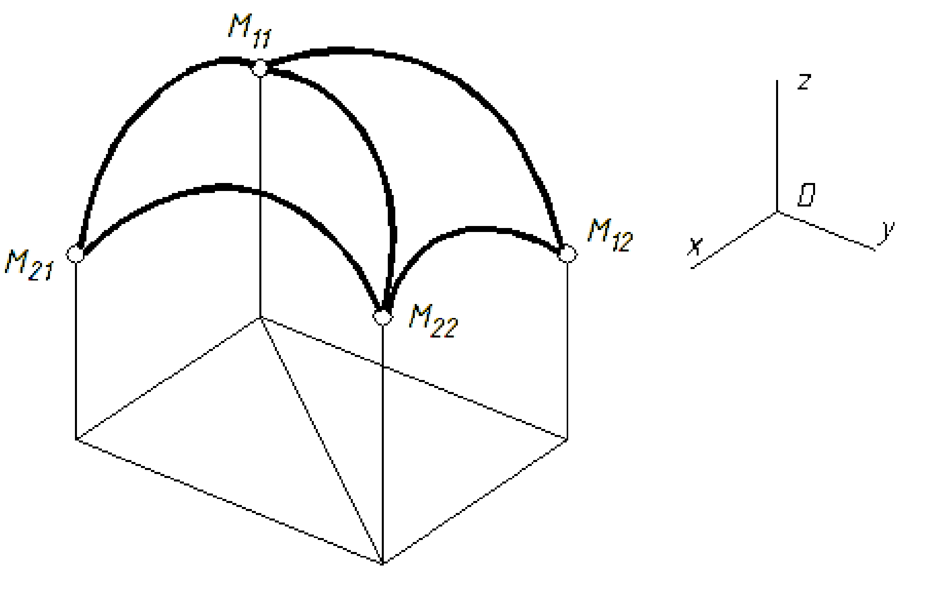

Рис. 1. – Вид отсека поверхности *Ф*

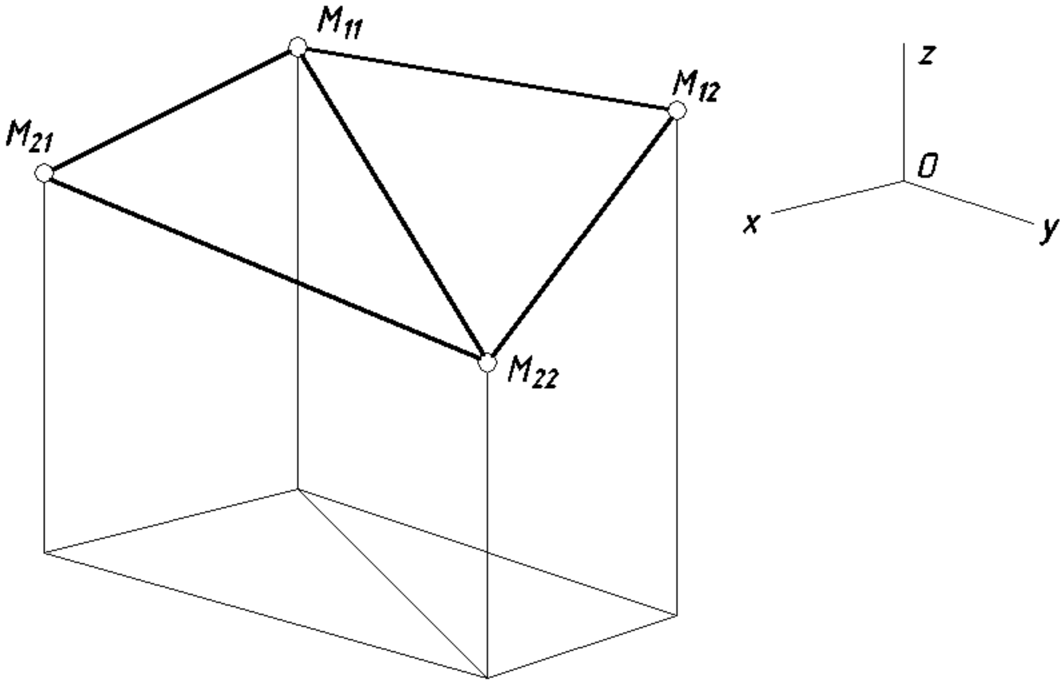

Рис. 2. – Треугольная сеть в пространстве

Управлять формой отсеков поверхности *Φ* можно, изменяя коэффициенты ***a*** и ***b*** в уравнении вида:

$$z_{ij}^{/} = a \cdot z_i^{/} + b \cdot z_j^{/}, \tag{8}$$

Если наложить условия непрерывности в узлах 3-сети, то эта сеть будет определять некоторую поверхность. Для того, чтобы 3-сеть определяла поверхность необходимо, чтобы якобианы составленные попарно из производных функций $f_1(x)$, $f_3\,(x_{ij}, y_{ij})$ и $f_2(y)$, $f_3\,(x_{ij}, y_{ij})$ не были равны 0. Условие гладкости определяется равенством все производных в узлах 3-сети.

Такая сеть необходима на этапе предварительного моделирования поверхностей.

Частными случаями полученных таким способом поверхностей являются поверхности переноса, поверхности зависимых сечений и линейчатые поверхности.

Таким образом, для задания поверхности требуется задать плоскую шестиугольную 3-ткань как пучки прямых с собственными или несобственными центрами, а затем надстроить над узлами 3-ткани массив точек, на который натягивается моделируемая поверхность по заданным условиям.

Литература

1. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499.

2. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная визуализации сложных геометрических форм // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1498.

3. Аракелян Г.С. О многомерных три-тканях: автореф. дис. канд. физ.-мат. М., 2006. 141 с.

4. Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-приложения // монография. Тверь: ТвГУ, 2010. 308 с.

5. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

7. Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размермерностей: автореф. дис. д-р физ.-мат. наук: 01.01.04. Казань, 2007. 29 с.

8. Пиджакова Л.М. Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2009. - 20 с.

9. Шестакова М.А. Шестиугольные три-ткани с частично симметричным тензором кривизны: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук наук: 01.01.04. Тверь, 2003. - 116 с.

10. Гольдберг В.В. О существовании паратактических три-тканей // Известия высших учебных заведений. Математика, 2008. №4 (551). - С. 22-27.

References

1. Rachkovskaya G.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499.

2. Rachkovskaya G. S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1498.

3. Arakelyan G.S. O mnogomernykh tri-tkanyakh: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. [About multidimensional three - fabrics]. M., 2006, 141 p.

4. Akivis M.A., Shelekhov A.M. Mnogomernye tri-prilozheniya: monografiya [Multidimensional three-applications]. Tver': TvGU, 2010, 308 p.

5. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

7. Tolstikhina G.A. Algebra i geometriya tri-tkaney, obrazovannykh sloeniyami raznykh razmermernostey: avtoref. dis. d-r fiz.-mat. nauk: 01.01.04

[Algebra and geometry three - the fabrics formed by sloyeniye of different razmermernost]. Kazan', 2007, 29 p.

8. Pidzhakova L.M. Tri-tkani s kovariantno postoyannymi tenzorami krivizny i krucheniya: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Tri - fabrics with covariant constant tensors of curvature and torsion]. Tver', 2009, 20 p.

9. Shestakova M.A. Shestiugol'nye tri-tkani s chastichno simmetrichnym tenzorom krivizny: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk nauk: 01.01.04. [Shestiugolne three - fabrics with partially symmetric tensor of curvature]. Tver', 2003, 116 p.

10. Goldberg V.V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika (Rus), 2008. №4 (551). URL: cyberleninka.ru/article/n/o-suschestvovanii-parataktichеskih-tri-tkaney.