

## Апробация конечного элемента смешанного метода для расчёта плоских стержневых систем с учётом физической нелинейности

В.Д. Раков<sup>1</sup>, Б.А. Тухфатуллин<sup>1</sup>, Л.Е. Путеева<sup>1</sup>, Я.С. Люлевич<sup>1</sup>, Ф.А. Красина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>2</sup>Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

**Аннотация:** В статье представлена апробация предложенного авторами ранее алгоритма расчёта плоских стержневых систем, поперечные сечения которых имеют одну ось симметрии, а материал является физически нелинейным. Диаграмма зависимости между напряжениями и деформациями соответствует идеальному упругопластическому материалу или упругопластическому материалу с упрочнением. Алгоритм расчёта основан на разработанном конечном элементе смешанного метода. Приведены примеры расчёта статически определимых стержневых систем.

**Ключевые слова:** конечный элемент смешанного метода, упругопластический материал, физическая нелинейность.

### Введение

В настоящее время расчёт конструкций целесообразно выполнять с учётом физической, геометрической, конструктивной и генетической нелинейностей [1], что вызвано необходимостью более точного моделирования поведения конструкции на всех стадиях её возведения и эксплуатации. В современных программных комплексах для инженерного анализа (Ansys, SCAD, ЛИРА САПР и др.) предусмотрена возможность учёта различных видов нелинейностей. В перечисленных комплексах алгоритм расчёта основан на методе конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений [2]. Наряду с этим, ряд авторов [3–5] разрабатывает алгоритмы МКЭ с использованием смешанного метода. В работах [3, 4] предложены варианты МКЭ в форме смешанного метода для решения геометрически нелинейных и конструктивно нелинейных задач. В докторской диссертации А.А. Покровского [5] разработан алгоритм учёта физической нелинейности при расчёте статически определимых стержневых систем.

---

В работах [6–8] авторов данной статьи предложен алгоритм МКЭ с использованием смешанного метода для расчёта статически определимых и статически неопределимых систем, выполненных из физически нелинейного материала (идеальный упругопластический материал и упругопластический материал с упрочнением).

### Материалы и методы

Расчёт плоских стержневых систем, как правило, осуществляется методом сил, перемещений или смешанным методом. Основная идея модификации алгоритма смешанного метода, предложенная в [7, 8], заключается в следующем. Задача по определению напряжённо-деформированного состояния стержня, работающего в упругопластической стадии, сводится к решению задачи аналогично закреплённого и нагруженного стержня с изменёнными жёсткостями поперечного сечения, для вычисления которых предложены две функции  $\eta(x)$ ,  $\mu(x)$ , определяемых соотношением деформаций и кривизн упругого сечения к упругопластическому. В качестве исходных данных для решения задачи принимаются: координаты узлов системы, условия сопряжения стержней, условия закрепления системы и нагружения. Для стержней должны быть заданы: форма и размеры поперечного сечения, модуль упругости  $E$ , пределы текучести при растяжении  $\sigma_T^{(+)}$  и сжатии  $\sigma_T^{(-)}$  для идеального упругопластического материала, и соответствующие характеристики  $\sigma_s^{(+)}$ ,  $\sigma_s^{(-)}$  для упругопластического материала с упрочнением. В результате исследований получены формулы для формирования матрицы откликов и вектора грузовых коэффициентов для конечного элемента смешанного метода с учётом нелинейной работы материала [8]. Таким образом, задача по определению напряжённо-деформированного состояния стержня, работающего в упругопластической стадии, сводится к решению задачи

---

аналогично закрепленного и нагруженного стержня с жёсткостями поперечного сечения  $EA^*(x)$  и  $EJ_z^*(x)$ .

Для статически определимого стержня распределение внутренних усилий не зависит от соотношения жёсткостей, поэтому решение задачи осуществляется в два этапа. Первый этап представляет «обыкновенный» упругий расчёт, из которого определяются внутренние усилия. На втором этапе для сечений с упругопластическими деформациями вычисляются функции  $\eta(x)$ ,  $\mu(x)$  и выполняется расчёт стержня переменной продольной  $EA^*(x)$  и изгибной  $EJ_z^*(x)$  жёсткостей. Результатами этого расчёта являются величины перемещений. Цель данного исследования – апробация предложенного и программно реализованного алгоритма расчёта статически определимых систем и сравнение полученных результатов с имеющимися в научной литературе.

**Пример № 1.** Требуется определить максимальный прогиб  $v_{\max}$  в середине пролёта шарнирно опертой балки (рис. 1, а) прямоугольного поперечного сечения с размерами:  $b = 2$  см,  $h = 1$  см. Пролёт балки  $\ell = 0,6$  м; величины внешних сосредоточенных моментов по торцам балки меняются от 0,080 кНм до 0,120 кНм. Материал балки – идеально упругопластический с характеристиками: модуль упругости материала  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, пределы текучести при растяжении и при сжатии одинаковы и равны  $\sigma_t^{(+)} = \sigma_t^{(-)} = 240$  МПа (рис. 1, б).

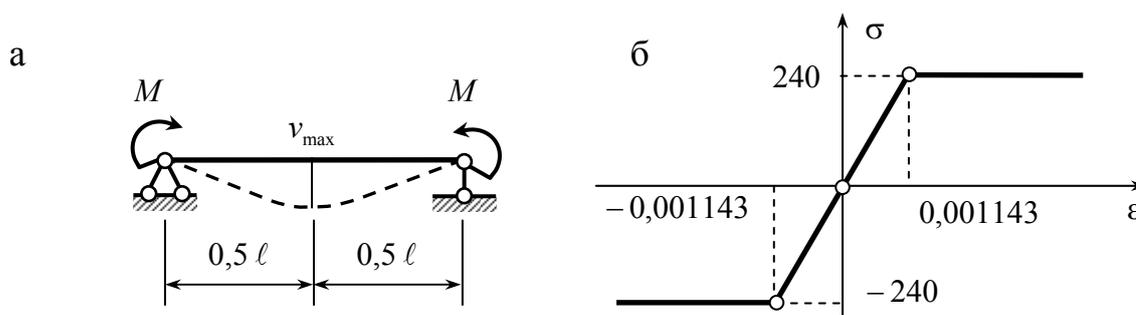


Рис. 1. – а) расчётная схема балки для примера № 1; б) диаграмма  $\sigma - \epsilon$

В работе [9] получены величины прогибов в середине пролёта балки при различных значениях сосредоточенных моментов с помощью разработанной автором программы FPLASTIC, в которой был реализован физически нелинейный балочный конечный элемент. Результаты расчёта по авторской программе и с помощью программного комплекса ANSYS сравнивались с аналитическим решением (табл. 1).

Используем для решения поставленной задачи алгоритм смешанного метода, предложенный в [7, 8]. Вычисление интегралов, необходимых для формирования матрицы откликов и вектора грузовых коэффициентов, производилось тремя различными способами: по формуле прямоугольников; по формуле трапеций; по формуле Симпсона. Результаты расчёта по предложенному алгоритму смешанного метода при количестве слоёв разбиения по высоте поперечного сечения, равным 60, приведены в табл. 1. При вычислении определённого интеграла количество участков разбиения одного КЭ назначалось равным 100.

Таблица № 1

Результаты вычисления максимального прогиба (мм) для примера № 1

$M$ , кНм	По данным работы [9]			Смешанный метод с использованием численного интегрирования по формуле	
	FPLASTIC	ANSYS	Анали- тическое решение	Прямо- угольников	Трапеций, Симпсона
0,080	10,286	10,286	10,286	10,183	10,286
0,110	20,543	20,489	20,571	20,388	20,594
0,115	29,057	27,928	29,092	28,806	29,097
0,119	64,838	54,111	65,052	64,799	65,454
0,120	222,540	108,908	$\infty$	610,971	617,143

**Пример № 2.** Требуется определить максимальный прогиб  $v_{\max}$  в балке при  $\ell = 1,0$  м,  $F = 150$  кН для двух типов поперечного сечения (рис. 2, а). Размеры прямоугольного поперечного сечения:  $b = 20$  см,  $h = 10$  см; радиус круглого сечения  $r = 7,5$  см. Материал балки принят упругопластическим с упрочнением:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_s^{(+)} = \sigma_s^{(-)} = 240$  МПа, коэффициенты упрочнения  $\alpha_s^{(+)} = \alpha_s^{(-)} = 0,1$  (рис. 2, б).

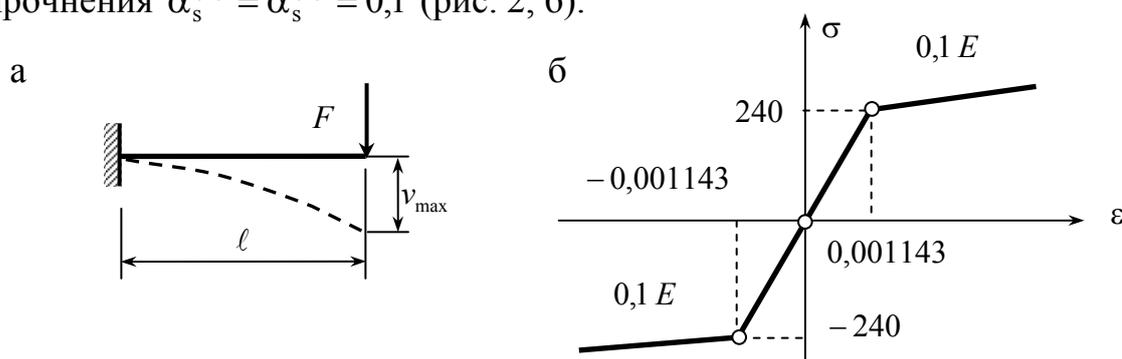


Рис. 2. – а) расчётная схема балки для примера № 2; б) диаграмма  $\sigma - \epsilon$

Данная задача в [10] решена аналитически и при помощи КЭ моделирования в программном комплексе ANSYS. Полученные в [10] результаты сопоставлялись с результатами расчёта по предложенному алгоритму смешанного метода (табл. 2).

Таблица № 2

Результаты вычисления максимального прогиба (мм) для примера № 2

Тип поперечного сечения	По данным работы [10]		Смешанный метод с использованием численного интегрирования по формуле	
	Аналитическое решение	ANSYS	Прямоугольников	Трапеций, Симпсона
Прямоугольное	23,5	24,2	22,801	24,017
Круглое	12,8	13,2	12,362	12,965

**Пример № 3.** Требуется определить максимальные прогибы  $v_{\max}$  на краю консольной балки при  $\ell = 6,0$  м;  $b = 10$  см;  $h = 30$  см [11]. Балка загружена силой  $F$ . Характеристики материала:  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_T^{(+)} = \sigma_T^{(-)} = 240$  МПа. В [11] приведены результаты расчёта при постепенном увеличении нагрузки; шаг по нагрузке составляет 5 Н. На 18000 шаге в сечении у заделки образуется пластический шарнир. На 16000 шаге, соответствующем величине силы в 80 кН, прогиб составил 146 мм. Следует отметить, что данная задача решалась с использованием МКЭ в перемещениях с разбиением балки на 20 КЭ одинаковой длины. Таким образом, размер упругопластической зоны в наиболее нагруженном сечении КЭ присваивался в расчёте всему КЭ. Эта же задача решалась по разработанному алгоритму смешанного метода с шаговым увеличением нагрузки от 8 кН до 88 кН; шаг по нагрузке составлял 8 кН. Результаты вычисления максимального момента и прогиба на краю консоли представлены в табл. 3 и на рис. 3.

Таблица № 3

Результаты вычисления максимального момента и прогиба для примера № 3

Фактор	Номер шага										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F$ , кН	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
$M_{\max}$ , кНм	48	96	144	192	240	288	336	384	432	480	528
$v_{\max}$ , мм	12,8	25,6	38,4	51,2	64,0	76,8	89,6	102,4	115,2	129,4	148,4

Следует отметить, что решение задачи по МКЭ в форме смешанного метода получено при минимальном числе КЭ (в данном примере использован один КЭ); в дальнейшем результат можно улучшить, увеличивая количество участков при интегрировании и число слоёв разбиения сечения по высоте.

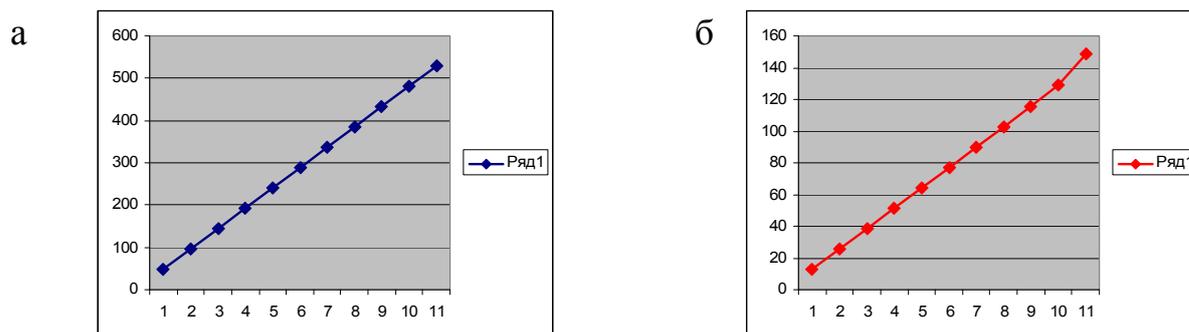


Рис. 3. – Результаты вычисления для примера № 3:

а) изгибающих моментов; б) прогибов

### Заключение

В статье выполнена апробация предложенного конечного элемента смешанного метода для расчёта статически определимых плоских стержневых систем с учётом физической нелинейности.

*Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ (номер проекта 7.8899.2017/8.9).*

### Литература

1. Перельмутер А.В. Беседы о строительной механике. М.: SCAD Soft, АСВ. 2014. 250 с.
2. Blohina N.S., Galkin A.G. The application of ANSYS software package in limit load analysis of structures made from anisotropic nonlinear elastic materials // Matec Web of Conferences. 2017. № 117. pp. 1–5.
3. Игнатьев В.А., Бочков М.И. Алгоритм расчёта систем с односторонними связями с заменой реакций опор на силовые неизвестные // Инженерный вестник Дона, 2019. №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5961/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5961/).
4. Ignatyev A.V., Onischenko E. V. Analysis of Flexible Bars and Frames with Large Displacements of Nodes By Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2017. C. 012049. URL: [//iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049#references/](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049#references/).

5. Покровский А.А. Смешанная форма МКЭ в расчётах стержневых систем и сплошной среды: дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.17. Пенза, 2000. 308 с.
  6. Раков В.Д., Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е. Алгоритм смешанного метода для определения прогибов в деревянных балках при учёте длительного нагружения // Инженерный вестник Дона, 2018. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5309/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5309/).
  7. Люлевич Я.С., Раков В.Д., Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е. Алгоритм и программа расчёта нормальных напряжений в сечении с одной осью симметрии при нелинейной работе материала // Инновации технических решений в машиностроении и транспорте: сборник статей, 14–15 марта 2019 г. МНИЦ ПГАУ. Пенза: РИО ПГАУ, 2019. С. 214–218.
  8. Люлевич Я.С., Раков В.Д., Путеева Л.Е., Тухфатуллин Б.А. Конечный элемент смешанного метода для расчёта плоских стержневых систем при нелинейной работе материала // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей XXII Международной научно-технической конференции, 13–14 июня 2018 г. МНИЦ ПГАУ. Пенза: РИО ПГАУ, 2019. С. 125–131.
  9. Новиков В.Е. Прочность и жёсткость сталежелезобетонных конструкций: часть 2. Реализация и проверка // Строительная наука и техника. 2010. № 1–2. С. 118–125.
  10. Островская Н.В., Мелешко В.А. Аналитические зависимости для касательных жёсткостей сечений при упругопластическом расчёте плоских стержневых систем // Морские интеллектуальные технологии 2017. № 4(38). Т.1. С.183–188.
  11. Шеин А.И., Чуманов А.В. Метод внешних нагрузок при расчёте упругопластических балочных систем МКЭ // Моделирование и механика конструкций. 2016. № 3. 9 с.
-

## References

1. Perel'muter A.V. Besedy o stroitel'noj mekhanike [Conversations about structural mechanics]. M.: SCAD Soft, ASV. 2014. 250 p.
  2. Blohina N.S., Galkin A.G. Matec Web of Conferences. 2017. № 117. pp. 1–5.
  3. Ignat'ev V.A., Bochkov M.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019. №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5961/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5961/).
  4. Ignatyev A.V., Onischenko E. V. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2017. S. 012049. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049#references/](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049#references/).
  5. Pokrovskij A.A. Smeshannaya forma MKE v raschetah sterzhnevyyh sistem i sploshnoj sredy [The mixed form of the FEM in the calculation of rod systems and solid environment]: diss. ... dokt. tekhn. nauk: 05.23.17. Penza, 2000. 308 p.
  6. Rakov V.D., Tuhfatullin B.A., Puteeva L.E. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5309/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5309/).
  7. Lyulevich Y.S., Rakov V.D., Tuhfatullin B.A., Puteeva L.E. Algoritm i programma raschyota normal'nyh napryazhenij v sechenii s odnoj os'yu simmetrii pri nelinejnoj rabote materiala (Innovacii tekhnicheskikh reshenij v mashinostroenii i transporte: sbornik statej, 14–15 marta 2019 g. MNIC PGAU). Penza: RIO PGAU, 2019. pp. 214–218.
  8. Lyulevich Y.S., Rakov V.D., Puteeva L.E., Tuhfatullin B.A. Konechnyj element smeshannogo metoda dlya raschyota ploskih sterzhnevyyh sistem pri nelinejnoj rabote materiala (Informacionno-vychislitel'nye tekhnologii i ih prilozheniya : sbornik statej XXII Mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoy konferencii, 13–14 iyunya 2018 g. MNIC PGAU). Penza: RIO PGAU, 2019. pp. 125–131.
  9. Novikov V.E. pStroitel'naya nauka i tekhnika. 2010. № 1–2. pp. 118–125.
  10. Ostrovskaya N.V., Meleshko V.A. Morskie intellektual'nye tekhnologii 2017. № 4(38). T.1. pp.183–188.
-



11. Shein A.I., Chumanov A.V. Modelirovanie i mekhanika konstrukcij. 2016.  
№ 3. 9 p.