Оценка справедливой цены опциона для обобщенной модели Кокса-Росса-Рубинштейна в случае m состояний

М.Н. Богачева, Л.И. Прянишникова

В качестве модели эволюции цен основных ценных бумаг на финансовом рынке рассмотрим систему двух дискретных стохастических уравнений, описывающих безрисковый B и рисковый S активы [1, 2].

Пусть B и S эволюционируют согласно формулам:

$$B_k = (1 + r)B_{k-1}, k = 1, \dots, N,$$

где $B_0 > 0$ и r - постоянная процентная ставка;

$$S_k = (1 + \rho_k)S_{k-1}, k = 1, \dots, N,$$

где $S_0 > 0$ и ρ_k- последовательность m-значных случайных величин:

$$\rho_k = \begin{cases} \alpha_1, \\ \alpha_2, \\ \dots, \\ \alpha_m. \end{cases}$$

Значения случайной величины $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ проанализируем следующим образом:

1. пусть $0 \in (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$;
2. обозначим

$$a = \min_{i=1,\dots,m} \{\alpha_i\}, \quad b = \max_{i=1,\dots,m} \{\alpha_i\}$$
$$c = \max_{i=1,\dots,m} \{\alpha_i : \alpha_i < 0\}, d = \min_{i=1,\dots,m} \{\alpha_i : \alpha_i > 0\} \qquad (1)$$

Будем считать, что каждый из атомов при переходе от этого шага к $k + 1$ дробится ровно на m частей.

Таким образом, в соответствии с обозначениями (1), имеем

$$-1 < a < c < r < d < b.$$

Введем функцию (см. [3, стр. 46])

$$F_n(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} f(x(1 + b)^k (1 + a)^{n-k}) C_n^k \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k},$$

где a и b – параметры рассматриваемой обобщенной модели Кокса-Росса-Рубинштейна, см. формулу (1). При этом λ находим из уравнения

$$(1-\lambda)a+\lambda b-r=0 \Rightarrow \lambda=\frac{r-a}{b-a}$$

Рассмотрим европейский опцион на покупку с платежным обязательством

$$f_N=(S_N-K)^+.$$

В этом случае

$$F_N(S_0,\lambda)=\sum_{k=0}^{N} C_N^k\lambda^k(1-\lambda)^{N-k} * \max\{0,S_0(1+a)^{N-k}(1+b)^k-K\}.$$

Пусть

$$k_0=min\{k\in Z_+ : S_0(1+a)^{N-k}(1+b)^k>K\}.$$

Ясно, что при $k_0>N$ функция $F_N(S_0,\lambda)=0$ и, следовательно, $C^*=0$. Пусть $k_0\le N$. Тогда имеем:

$$C^*=(1+r)^{-N}F_N(S_0;\lambda)=S_0\sum_{k=k_0}^{N} C_N^k\lambda^k(1-\lambda)^{N-k}\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k-$$

$$-K(1+r)^{-N}\sum_{k=k_0}^{N} C_N^k\lambda^k(1-\lambda)^{N-k}.$$

Полагая

$$\bar{\lambda}=\left(\frac{1+b}{1+r}\right)\lambda, B(j,N;\lambda)=\sum_{k=k_0}^{N} C_N^k\lambda^k(1-\lambda)^{N-k},$$

получаем следующее следствие формулы Кокса-Росса-Рубинштейна [3, с.50].

Теорема. Для европейского опциона на покупку с платежным обязательством $F(S_N)=(S_N-K)^+$, рассматриваемого в рамках модели (1), справедливая цена опциона $C^*(N)$ определяется формулой

$$C^*(N)=S_0B\left(k_0,N;\bar{\lambda}\right)-K(1+r)^{-N}B(k_0,N;\lambda),$$

где $k_0=1+\left[ln\frac{K}{S_0(1+a)^N}/ln\frac{1+b}{1+a}\right]$, причем $C^*(N)=0,$ если $k_0>N$.

Нахождение цены $C_*(N)$ аналогично рассмотренному выше.

Теорема. Для европейского опциона на покупку с платежным обязательством $F(S_N) = (S_N - K)^+$, рассматриваемого в рамках модели (1), справедливая цена опциона $C_*(N)$ определяется формулой

$$C_*(N) = S_0 B(k_0, N; \bar{\mu}) - K(1+r)^{-N} B(k_0, N; \mu),$$

где $k_0 = 1 + \left[ln \frac{K}{S_0(1+c)^N} / ln \frac{1+d}{1+c}\right]$, причем $C_*(N) = 0$, если $k_0 > N$;

$$\mu = \frac{r-c}{d-c}, \bar{\mu} = \frac{1+d}{1+r}\mu.$$

Рассмотрим оценку параметров обобщенной модели Кокса-Росса-Рубинштейна [4, 5, 6]. Качественная оценка параметров модели позволит использовать результаты, полученные выше для дальнейшего исследования. Обычно рассматривают три вида оценки параметров: на основе метода максимального правдоподобия, на основе ранговых статистик, и на основе знаковых статистик. Однако первые два метода требуют знание закона распределения. Поэтому в работе применена непараметрическая схема оценки параметров, которая была ориентирована на знаковые статистики [7].

Расчет параметров нашей модели произведем на основе статистической информации. Происходит статистическая обработка данных стоимости акций и курсов валют (доллар и евро) за 2010 год. Данные получены с сайта rbc.ru. Выборка содержит более 6 тыс. записей. Нами проанализированы следующие виды акций: Американский доллар, Аэрофлот, ДальЭнерго, Евро, ЕЭС России, ИркутскЭнерго, Лукойл, МосЭнерго, РБК, Ростелеком, Ростовэнерго, Самараэнерго, Саратовэнерго, Свердловэнерго, СибНефть, Сургутнефтегаз, Уралсвязь, УралСиб, ЮКОС.

Данные хранятся в базе данных Акции.dbf (файл инсталлируется вместе с программой).

В качестве параметров модели нами выбраны:

- a - минимальная процентная ставка,
- b - максимальная процентная ставка,
- c - минимальное падение процентной ставки,
- d - минимальный рост процентной ставки

- r - среднее значение процентной ставки.

Вышеуказанные параметры модели анализируются для двух любых выбранных активов за период с 1.01.2010 по 31.12.2010.

При выборе активов из списка важно, какой из активов выбирается первым, а какой вторым. Первый выбранный актив играет роль рискового актива, второй же безрискового [8]. При этом появляется возможность "перекачки" средств из одного актива в другой [9].

По результатам, полученным в статье, построено программное приложение, позволяющее произвести расчет справедливой верхней цены опциона и расчет нижней цены опциона [10]. Таким образом, получен интервал цен, придерживаясь которого можно минимизировать риск при работе на финансовом рынке, модель которого совпадает с обобщенной моделью Кокса-Росса-Рубинштейна.

Программное приложение позволяет:

- выбрать тип ввода параметров модели: статистический или пользователем;
- выбрать два вида актива при статистическом поиске параметров модели: в первом столбце пользователь выбирает рисковый актив, во втором списке безрисковый актив;
- ввести данные для расчета: необходимо задать начальную цену акции; количество времен; контрактную цену.
- получить справедливую цену опциона для верхнего и нижнего хеджа (рис. 1).

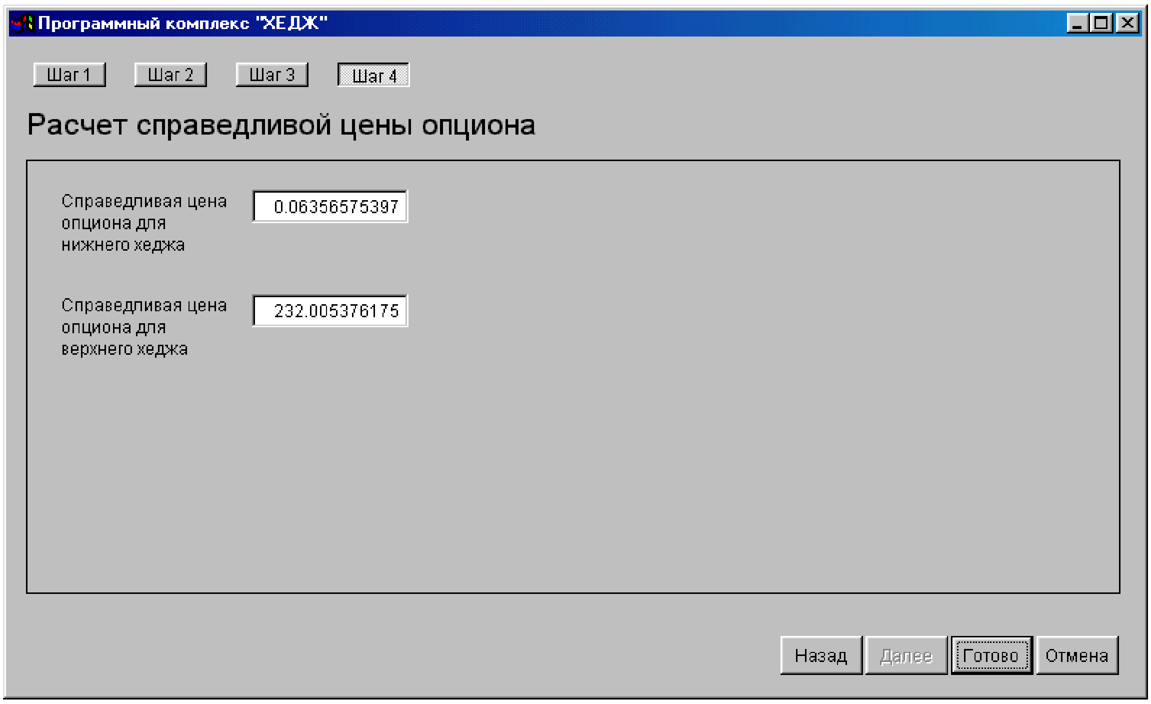

Рис. 1. – Программный комплекс для расчета справедливой цены опциона.

Таким образом, были изучены основные методы оценки параметров модели (1), и в качестве оптимального выбран метод знаковых статистик.

Литература:

1. Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. Option pricing a simplified approach [Text] //Journal of Financial Economics. 1976. – Vol. 7 (september). – P.229-263.

2. Harrison J.M., Pliska S.R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading [Text] // Stochastic Process. Appl. 1981. – Vol. 11, №3. –P.215-260.

3. Мельников, А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг [Текст] / А.В. Мельников. – Москва: ТВП, 1997. – 126 с. – ISBN 5-85484-023-5.

4. Красий, Н.П. О безарбитражности и полноте обобщённой модели финансового рынка в случае скупки акций [Текст] / Н.П. Красий, И.В. Павлов // Обозрение прикладной и промышленной математики – Москва, ТВП. 1999. – Т.6. №1. – С.162-163.

5. Мисюра, В.В. Расчёт хеджирующих стратегий для опционов европейского типа в случае (B,S)-рынка относительно специальной хааровской фильтрации [Текст] // Сборник научных трудов III Всероссийского симпозиума "Математическое моделирование и компьютерные технологии". Кисловодск, 1999. – Т.4. – С.62-64.

6. Красий Н.П. О вычислении спрэда для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 2). – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1378 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

7. Болдин М.В., Симонова Г.И., Тюрин Ю.Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей [Текст] / М.: ФИЗМАТЛИТ, 1997. – 288 с. – (Теория вероятностей и математическая статистика.) – ISBN 5-02-015222-6.

8. Белявский, Г.И., Мисюра В.В., Павлов И.В. Исследование модели (B,S)-рынка относительно специальной хааровской фильтрации [Текст] / Г.И. Белявский, В.В. Мисюра, И.В. Павлов // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 1998 – С. 179-181.

9. Белявский, Г.И. Ранговый критерий полноты одного финансового рынка при допущении арбитража [Текст] / Г.И. Белявский, В.В. Мисюра, И.В. Павлов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – Москва, ТВП. 1999. – Т.6. №1. – С.164-165.

10. Шишкова А.Н. Программный комплекс τ-полнота (B, S)-рынка в случае специальной хааровской фильтрации при допущении арбитража [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 2). – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p1y2012/1174 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.